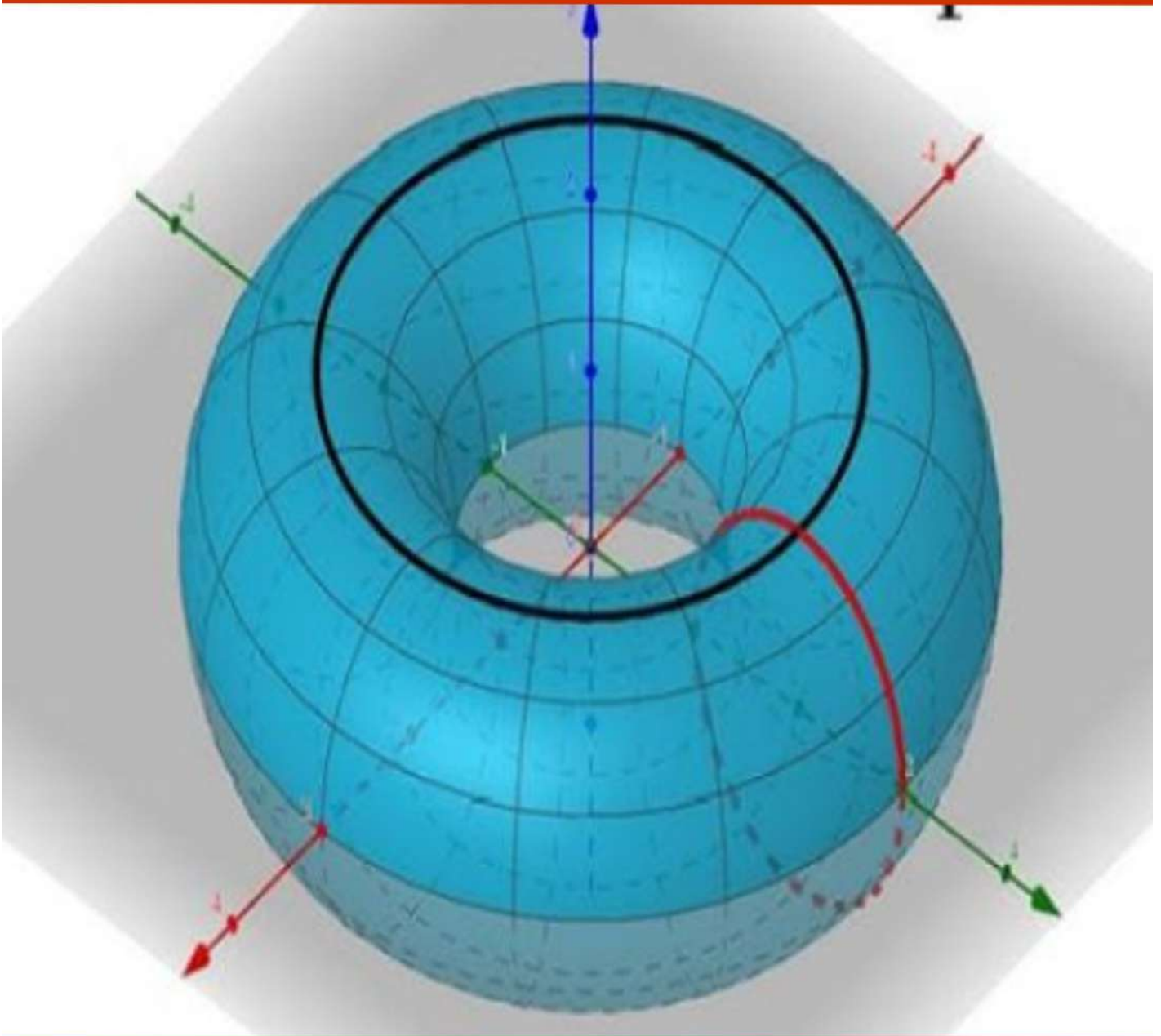


PRÉ-CÁLCULO AMPLIADO E COM OS PROBLEMAS RESOLVIDOS



Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros



Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

Pré-Cálculo Ampliado e com os Problemas Resolvidos

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586P Pré-Cálculo Ampliado e com os Problemas Resolvidos
/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. Jornandes
Dias da Silva. Juan Carlos Oliveira de Medeiros. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2024

267 f.: il

DOI: 10.37423/2024.edcl991

ISBN: 978-65-5367-530-8

Modo de acesso: World Wide Web

Incluir Bibliografia

1. fatorações 2. funções 3. trigonométricas-e-inversas 4. exponencial-e-logarítmica 5.
matrizes-e-sistemas-lineares I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque
III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Silva, Jornandes Dias da V. Medeiros, Juan Carlos
Oliveira de VI. Título

CDU: 510

<https://doi.org/10.37423/2024.edcl991>

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

MSc Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior

MSc Humberto Costa

MSc Thays Merçon

MSc Adalberto Zorzo

MSc Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno

PHD Willian Douglas Guilherme

MSc Andrea Carla Agnes e Silva Pinto

MSc Walmir Fernandes Pereira

MSc Edisio Alves de Aguiar Junior

MSc Rodrigo Sanhotene Silva

MSc Wesley Pacheco Calixto

MSc Adriano Pereira da Silva

MSc Frederico Celestino Barbosa

MSc Guilherme Fernando Ribeiro

MSc. Plínio Ferreira Pires

MSc Fabricio Vieira Cavalcante

PHD Marcus Fernando da Silva Praxedes

MSc Simone Buchignani Maigret

Dr. Adilson Tadeu Basquerote

Dra. Thays Zigante Furlan

MSc Camila Concato

PHD Miguel Adriano Inácio

MSc Anelisa Mota Gregoleti

PHD Jesus Rodrigues Lemos

MSc Gabriela Cristina Borborema Bozzo

MSc Karine Moreira Gomes Sales

Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares

MSc Pedro Panhoca da Silva

MSc Helton Rangel Coutinho Junior

MSc Carlos Augusto Zilli

MSc Euvaldo de Sousa Costa Junior

Dra. Suely Lopes de Azevedo

Dr. Francisco Odecio Sales

MSc Ezequiel Martins Ferreira

MSc Eliane Avelina de Azevedo Sampaio

MSc Carlos Eduardo De Oliveira Gontijo

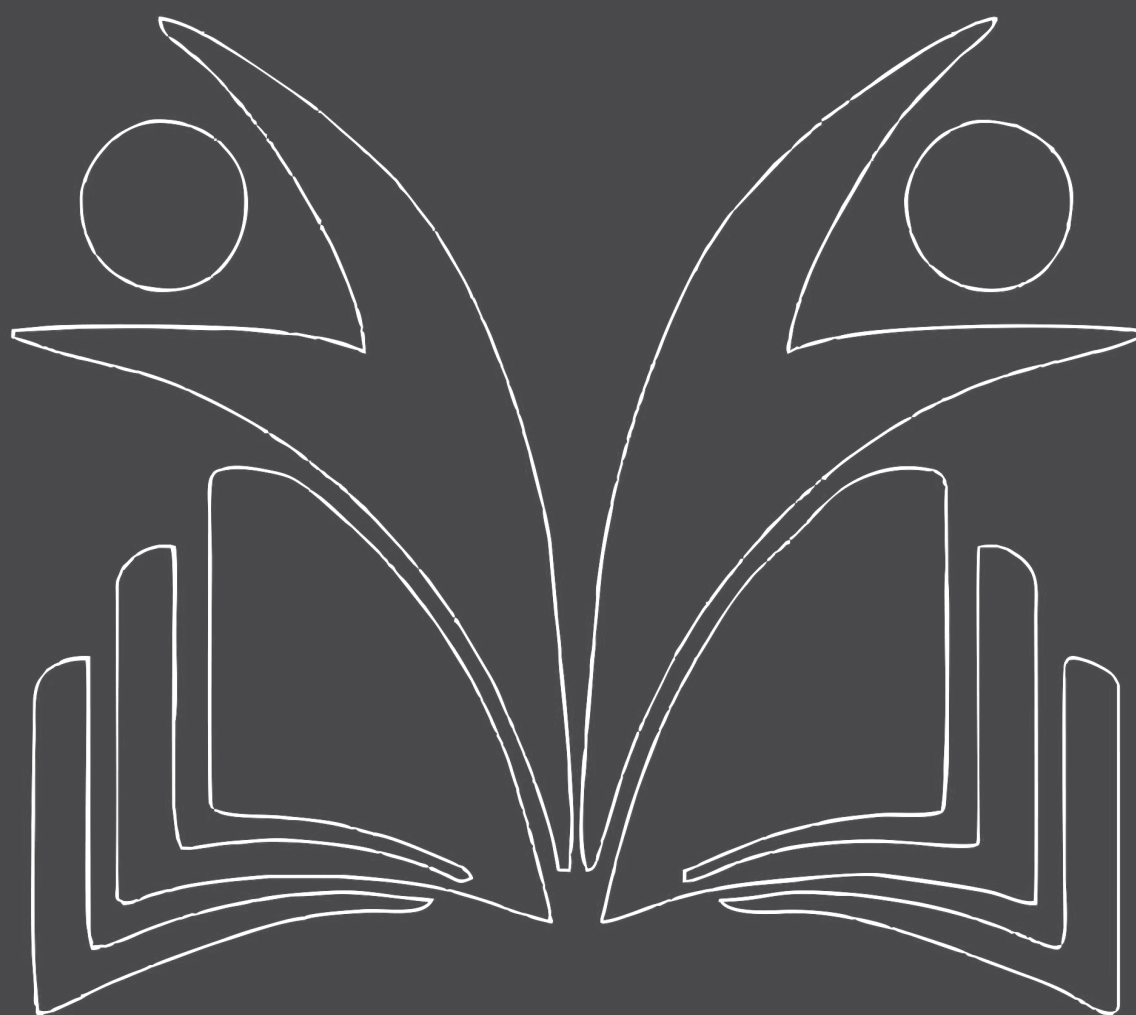
Dr. Rodrigo Couto Santos

Dra. Milena Gaion Malosso

PHD Marcos Pereira Dos Santos



10.37423/2024.edcl991



Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo e conhecimentos, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuíram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Roberto Lessa, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha) e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões em nossas conversas e cafezinho na Unicap, ao longo de três décadas.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais,
Filhos, Esposas, Todos os familiares
e Ao grande Mestre Olavo Otávio
Nunes (In Memoriam)

Prefácio

O propósito deste texto é apresentar a ponte na linguagem entre Matemática do Ensino Médio e O primeiro ano na Universidade com Cálculos 1,2, Geometria Analítica Vetorial e Álgebra Linear, frutos das experiências de mais de três décadas na Unicap e Poli com os amigos Cleto Bezerra de França, Cláudio Maciel (poeta risadinha), José Roberto Lessa e na Universidade de Pernambuco-UPE-Escola Politécnica de Pernambuco Poli, com os amigos citados anteriormente e professores da UPE-Poli e os amigos Prof. Dr. Willames de Albuquerque Soares e Prof. Dr Sérgio Mário Lins Galdino. Devemos ressaltar que: O público alvo são: Professores de Matemática, alunos da Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Matemática, Engenharias e Áreas Afins.

Neste trabalho, estudamos problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um Letramento Matemático de Mentalidade Crescente, Criativa e Flexível em temas básicos do Ensino Médio; mas, próximo a linguagem do Cálculo Diferencial e Integral; bem como, Geometria Analítica Vetorial e Álgebra Linear.

Vale a pena salientar: buscamos dentro do possível, resolver os problemas com todos os detalhes; em alguns casos inclusive, fazendo comentários.

O texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho e com segurança (conferindo não apenas os resultados; mas, todo o desenvolvimento lógico operacional).

No Capítulo 1, dedicado quase que exclusivamente as notações de todo o trabalho e o alfabeto grego, destacando e corrigindo alguns erros comuns do Ensino Médio. No Capítulo 2, Apresentaremos aspectos históricos, vamos usar o Corpo Ordenado Completo com o nome básico de conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} , são definidas duas operações que satisfazem aos *axiomas ou postulados*, como consequência teremos várias propriedades, sendo o conjunto com ordem dos elementos: podemos trabalhar com produtos notáveis, fatorações e racionalizações, módulo ou valor absoluto, desigualdades, casos particulares de equações polinomiais. No primeiro momento, as demonstrações das propriedades podem deixar para um estudo posterior, quando se sentir mais seguro e precisar mergulhar; em águas mais profundas: se tratando de letramento matemático, se volta e estuda as demonstrações em detalhes. Ressaltando alguns aspectos históricos. Neste Capítulo 3 daremos ênfase a função, alguns tipos de funções, tais como: funções polinomiais do primeiro grau e casos particulares e segundo grau, função cúbica, recíproca, raiz quadrada, raiz cúbica, composições de funções, funções inversas. Ressaltando que faremos esboços de gráficos por translações e reflexões de eixos. No Capítulo 4, vamos abordar funções do tipo: pares e ímpares, injetoras, sobrejetoras e bijetora, composições de funções, definindo a função inversa através da composição de funções, ressaltando que: a inversa será definida usando a composição, tendo a composta da função com sua inversa o resultado a função identidade. Além disso, deduzindo que se a função é invertível, por conseguinte: a mesma será injetora e sobrejetora, óbvio que a recíproca ou contra-positiva é trivial (funções bijetoras são invertíveis). Para concluir o capítulo, voltamos ao tema de funções exponenciais e logarítmicas (destacando a exponencial de base "e" por se tratar de uma função exponencial, onde tem diversos fenômenos naturais que as utiliza como modelagem matemática: crescimento populacional, infecções por vírus, meia-vida de elementos radioativos ou decaimento radioativos, com função logarítmica modela situações de abalos sísmicos, veremos também como consequências da injetividade, crescimento e decréscimo das funções exponenciais e logarítmicas, as equações e inequações exponenciais e logarítmicas. No Capítulo 5, vamos abordar trigonometria no triângulo retângulo, funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, esboços gráficos das funções um período fundamental; outros gráficos trigonométricos: usando translações e reflexões de eixos, as funções trigonométricas inversas: arcoseno, arcocosseno, arcotangente, arcocotangente, arcosecante e arcocossicante e seus respectivos gráficos, calculando alguns arcos particulares como exercícios. Salientando que foi apresentado

no Apêndice C um pouco da história de Gauss e os Números Complexos identificando a forma algébrica com o par ordenado $z = a + bi \simeq (a, b)$, com a, b pertencente aos números reais.

Finalizando, a ampliação do texto com o Capítulo 6, destacando um pouco de história em torno das matrizes; sistema de equações lineares, escalonamento de forma intuitiva evitando o formalismo e matrizes.



Observação

Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa uma certo cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, correções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endereços:

cjs@poli.br

was@poli.br

galdino.sergio@gmail.com

jornandesdias@poli.br

juca@ufc.br

Recife, 30 de julho de 2024

Conteúdo

Copiright	iii
Corpo Editorial	iv
Agradecimentos	v
Dedicatória	vi
Prefácio	vii
DOI	viii
Conteúdo	x
Capítulo 1	1
1.1 Notações	2
1.2 Metodo de Redução ao Absurdo	17
1.3 Notações para funções trigonométricas	17
1.4 Notações para funções trigonométricas inversas	18
1.5 Apêndice A	18
1.6 Fazendo Médias: Harmônica, Geométrica e Aritmética	21
1.7 Algumas Normas em \mathbb{R}^n :	23
1.8 Translações e Reflexões	24
1.9 Alfabeto Grego:	29
Capítulo 2	30
2.1 Aspectos Históricos	31
2.2 Estrutura, Ordem e Completeza de \mathbb{R}	32
2.2.1 Algumas consequências do corpo \mathbb{R}	32
2.2.2 Axioma de Ordem	34
2.2.3 Fatoração	37
2.2.4 Produtos Notáveis	39
2.2.5 Racionalização	47
2.3 Um pouco de História e Nascimento do Cálculo	58
2.4 Uma pausa para alguns Comentário sobre retas	60
2.4.1 Equação da reta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e coeficiente angular m :	60
2.4.2 Equação da reta que passa pelos pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$:	61
2.4.3 Retas paralelas $L_1: y = m_1x + k$ e $L_2: y = m_2x$ denotaremos por $L_1 // L_2$:	62
2.4.4 Retas Perpendiculares $L_1: y = m_1x$ e $L_2: y = m_2x$ denotaremos por $L_1 \perp L_2$:	64
2.5 Equação do 2º Grau	68
2.5.1 Dedução da Fórmula	68
2.5.2 Soma e Produto das raízes do trinômio do 2º grau:	69
2.5.3 Forma Fatorada:	69
2.5.4 A Dedução da equação do 2º grau por Viète e Um pouco de História	70

2.6	Módulo ou Valor Absoluto	72
2.6.1	Consequências	73
Capítulo 3		84
3.1	Função	84
3.2	Gráfico de uma função	92
3.3	Funções Polinomiais	96
3.3.1	Função Polinomial do 1º grau	96
3.3.2	Função Polinomial do 2º grau	104
3.4	Gráficos de funções Elementares	118
Capítulo 4		130
4.1	Funções Pares e Ímpares	131
4.2	Composições de Funções	136
4.3	Tipos Especiais de Funções: Injetora, Sobrejetora e Bijetora	140
4.4	Função Exponencial	153
4.5	Função Logarítmica	158
Capítulo 5		171
5.1	Trigonometria no Triângulo Retângulo	171
5.1.1	Esboço dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno em período fundamental 2π	176
5.1.2	Esboço dos gráficos das funções trigonométricas	177
5.1.3	Período de cada Função Trigonométrica dada	180
5.2	Apêndice A	185
5.2.1	A distância de um ponto à uma reta	185
5.2.2	Áreas das regiões limitadas pelos triângulos inscritos na elipse e circunferência	186
5.2.3	Áreas das regiões limitadas pela elipse e circunferência	187
5.3	Apêndice B	188
5.3.1	Lei dos cossenos usando a distância entre dois pontos	188
5.3.2	Uma prova simples do $\cos(a-b)$ usando a distância entre dois pontos e a lei dos cossenos	189
5.3.3	Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R}	192
5.4	Apêndice C	194
5.4.1	Um pouco da História do Matemático Karl Friedrich Gauss	194
5.4.2	Números Complexos	195
5.4.3	$P_1(\mathbb{R})$ – Subespaço dos polinômios de grau menor do que ou igual a 1, com entradas reais.	197
5.5	Apêndice D	198
5.6	Apêndice E: Funções Trigonométricas Inversas	206
Capítulo 6		217
6.1	Um pouco de história em torno do nome matriz	217
6.2	Considerações Preliminares	218
6.3	Conceitos Básicos	219
6.3.1	Equação Linear	219
6.3.2	Sistema de Equações Lineares	219
6.3.3	Sistemas Equivalentes	220

6.3.4	Sistema Escalonado	220
6.3.5	Critério para escalonar um sistema linear	221
6.3.6	Classificar um sistema linear no tocante ao número de soluções	221
6.4	Matrizes	228
6.4.1	Matrizes Inversas	233
6.5	Apêndice A	242
Capítulo 6	Exercício	242
Bibliografia		254

Capítulo 1

”...Essa forma de colocar a questão parece exigir uma explicação dos princípios de não contradição, de razão suficiente ou determinante, de escolha do melhor e de identidade dos indicerníveis...” Ensaios de Teodiceia: Sobre a Bondade de Deus, a Liberdade do Homem e a Origem do Mal. Editora Estação Liberdade, 1ª edição, 2013.



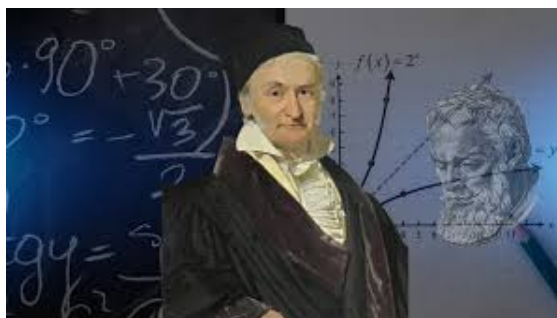
G.W. Leibniz (1646 – 1716)

”...Ângela é doida. Mas tem uma lógica matemática na sua doidice aparente. E se diverte muito a escandalosa. Aguça-se demais e depois não sabe o que fazer de si. Que se dane. Entre o ”sim” e o ”não” só há um caminho. Escolher. Ângela escolheu ”sim”. Ela é tão livre que um dia será presa. ”Presa por quê?” ”Por excesso de liberdade.” ”Mas essa liberdade é inocente?” ”É.” ”Até mesmo ingênua.” ”Então por que a prisão?” ”Porque a liberdade ofende.“ Um Sopro de Vida: (Pulsações), 8a. ed. Editora Nova Fronteira, 1978.



Clarice Lispector Escritora Ucrâniano-brasileira (1920 – 1977)

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”



Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

”Não se preocupe muito com as suas dificuldades em Matemática, posso assegurar-lhe que as minhas são ainda maiores.”



Albert Einstein (1879 – 1955)

1.1 Notações

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ O conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ O conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q} = \{x = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$: O conjunto dos números racionais

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Conjunto dos números irracionais, ou seja, conjunto de todos os números reais que não são racionais.

\mathbb{R} : Corpo Ordeando Completo (O conjunto dos números reais)

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ O conjuntos dos números reais positivos

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ O conjuntos dos números reais negativos.

\forall : Para todo ou quaisquer que sejam (Quantificador Universal)

é o A invertido, inicial da palavra *all* do inglês e *allgemein* do Alemão.

\exists : Existe (Quantificador Existencial)

$\exists!$: Existe um único

Se p , então, q ($p \implies q$), Lê-se: p implica em q

$(p \implies q \iff \sim q \implies \sim p)$, Lê-se: p implica em q é equivalente a, não q implica em não p

p se, e somente se, q , $(p \iff q)$ pode se ler: p é equivalente a q

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

$$\text{Ordem: } x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}^+ \iff y - x > 0.$$

Número par $a = 2k, k \in \mathbb{N}$

$$a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

m.d.c. (E_1, E_2, \dots, E_n) Máximo divisor comum entre E_1, E_2, \dots, E_n .

$$M.H. = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \text{ (Média Harmônica)}$$

$$M.G. = \sqrt{xy} \text{ (Média Geométrica)}$$

$$M.A. = \frac{x+y}{2} \text{ (Média Aritmética)}$$

Sejam $x_j > 0$ com $j = 1, 2, \dots$ e $x_j \in \mathbb{R}$, as médias, no caso geral, temos:

$$M.H. = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}}$$

(Média Harmônica)

$$M.G. = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

(Média Geométrica)

$$M.A. = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(Média Aritmética)

Vale o seguinte resultado:

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

(somatório de a_j , j variando de 1 até n)

$$(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \dots + xy^{n-2} + x^0 - y^{n-1}) :$$

À medida que o expoente de

x decresce de $n - 1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y , só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 até $n - 1$.

$$(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \dots - xy^{n-2} + x^0 - y^{n-1}) :$$

À medida que o expoente de x decresce de $n - 1$ até 0. O mesmo ocorre

com o expoente de y , só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 até $n - 1$.

Além disso, os sinais são alternados. Função definida por duas sentenças: funções que são dadas por " dois pedaços de tipos de funções diferentes "

Quociente de Newton

$$q(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0$$

ou

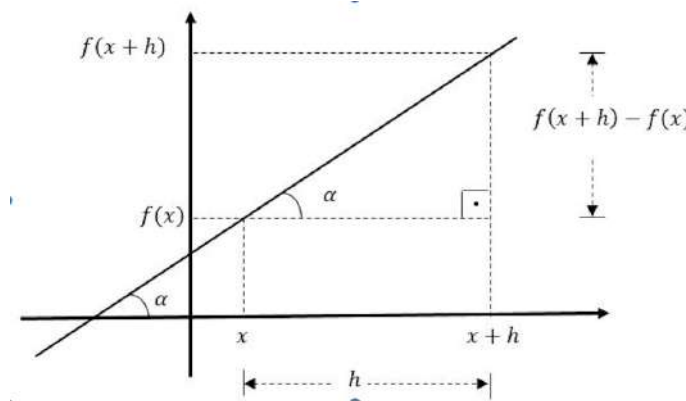
$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ com } x \neq a,$$

A inclinação da reta que passa pelos pontos distintos

$$P(x, f(x)) \text{ e } Q(x+h, f(x+h))$$

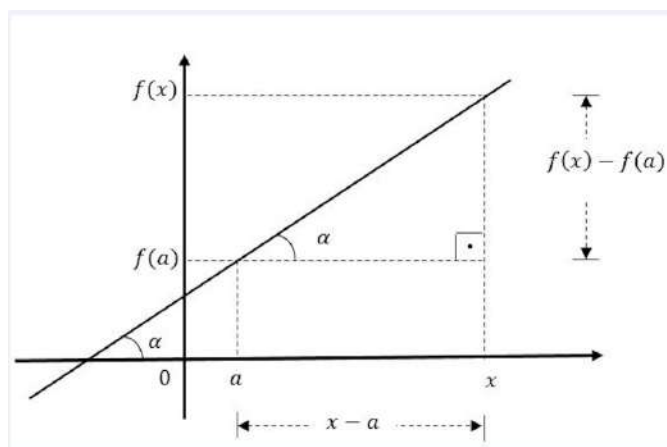
chamada posteriormente de quociente de Newton é de fundamental importância para o Cálculo.

$$q(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0,$$



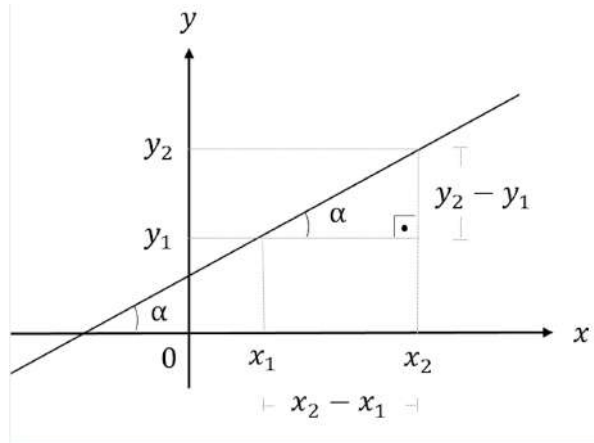
Inclinação da reta que passa pelos pontos distintos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$ será descrita por:

$$q(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

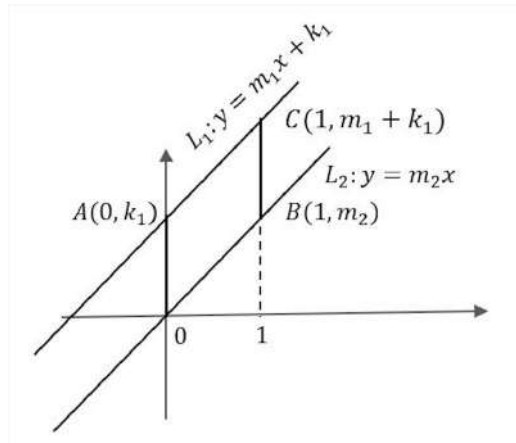


O coeficiente angular da reta que passa por $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ é dada por:

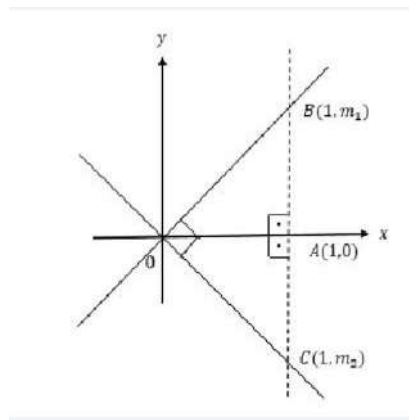
$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1.$$



Retas paralelas $L_1 : y = m_1x + k_1$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1 // L_2$:



Retas Perpendiculares $L_1 : y = m_1x$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1 \perp L_2$:



As retas são perpendiculares equivale a dizer:

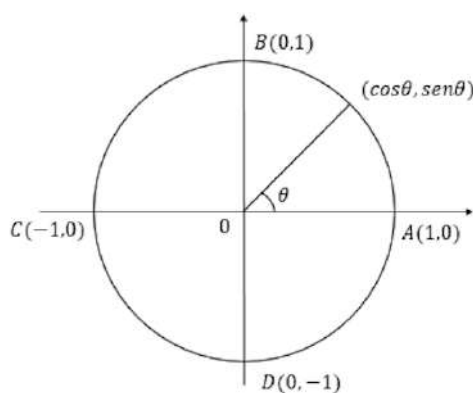
$$L \perp S \iff m_L \cdot m_S = -1.$$

Equação da circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $R = 1$ é dada por

$$\xi : x^2 + y^2 = 1.$$

Como consequência, tem-se:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$



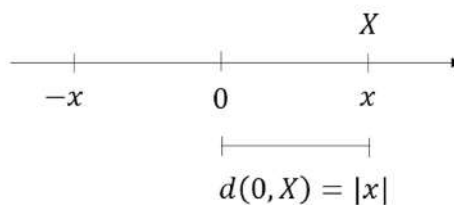
Cuidado com
esse tipo de
operação!!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \neq \frac{1}{x+y}$$

Módulo ou valor absoluto, denotado por:

$$|x| = d(0, X) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

é a distância da origem O ao ponto X na reta.



Vizinhança aberta de centro x_0 e raio $\delta > 0$.

$$\mathbb{V}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{X} : |x - x_0| < \delta\}$$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\iff -\delta < x - x_0 < \delta \iff x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ x \in \mathbb{V}_\delta(x_0) &\iff x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j \right|$$

(Módulo do somatório de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\sum_{j=1}^n |x_j|$$

(Somatório do módulo de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j \right| = |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$$

(Módulo da soma de x_1, x_2, \dots, x_n)

$$\sum_{j=1}^n |x_j| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

(Soma dos módulos de x_1, x_2, \dots, x_n)

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|$$

(Desigualdade triangular generalizada)

$$\left| \prod_{j=1}^n x_j \right| = |x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n|.$$

(Módulo do produtório de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\prod_{j=1}^n |x_j| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_n|$$

(produtório do módulo de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\left| \prod_{j=1}^n x_j \right| = \prod_{j=1}^n |x_j|$$

$$\left| \prod_{j=1}^{n+1} x_j \right| = \left| \prod_{j=1}^n x_j \cdot x_{n+1} \right| = \left| \sum_{j=1}^n x_j \right| \cdot |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^n |x_j| \cdot |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|$$

Majorações:

$|x| \leq M, \forall x \in A$, diz-se que M é um majorante para A .

Problema 1.1 (Norma Euclidiana)

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então, prove que:

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}M,$$

onde: $M = \sup \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração

Basta notar que:

$$|x_j|^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

tomando-se: $M = \sup \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$, vem:

$$|x_j|^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \overbrace{M^2 + M^2 + \dots + M^2}^{n \text{ vezes}} = nM^2,$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Portanto,

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}M,$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

■

m.d.c. (p, q) máximo divisor comum entre p e q .

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.

$\mathbb{D}(f) = \mathbb{A}$ é chamado de domínio de f , denotamos por:

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{D}_f = \mathbb{A}.$$

$CD(f) = \mathbb{B}$ é o contra-domínio de f , descrito por:

$$CD(f) = CD_f = \mathbb{B}.$$

A função é f (é a lei que diz o que fazer) e não $f(x)$ que é o resultado da lei. A imagem de f será representada por $\text{Im}(f)$ e dada por:

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{B} : y = f(x), x \in \mathbb{A}\}.$$

O gráfico de f , denotado por G_f , é dado por:

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B} : y = f(x)\}$$

o gráfico de f é um subconjunto do produto cartesiano de \mathbb{A} por \mathbb{B} , Notação:

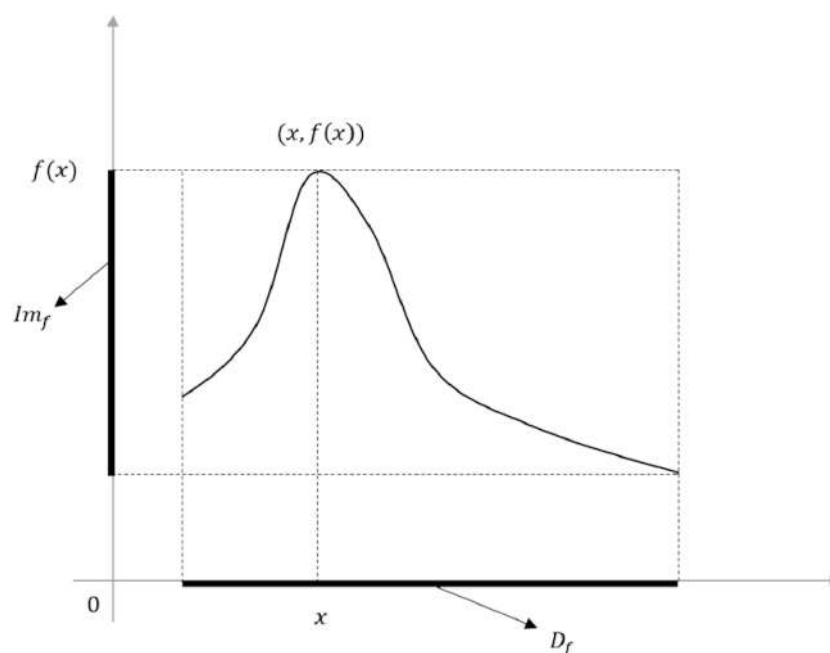
$$G_f \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}.$$

(\subseteq está contido ou é igual a).

\leq menor do que ou igual a (menor ou igual a)

\geq maior do que ou igual a (maior ou igual a)

Esboço do gráfico de f :



Guarde com bastante atenção estes fatos:

(i) De forma intuitiva, o \mathbb{D}_f é a projeção do gráfico f , sobre o eixo x e a $\text{Im}(f)$ é a projeção do gráfico de f , sobre o eixo y .

(ii) toda reta paralela ao eixo y , passando pelo $x \in \mathbb{D}_f$, corta o gráfico de f em um único ponto.

Zero da função $f(x) = 0$ (Valores que corta o eixo x)

f é crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

f é decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Função (transformação) linear

Toda função (transformação) que satisfaz estas duas condições chamamos de *Linear*

$$(i) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

$$(ii) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in \mathbb{R} : f(\alpha x_1) = a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = \alpha f(x_1)$$

Esboço gráfico por translações de eixos (Significa deslocar o gráfico à direita ou à esquerda para cima ou para baixo)

Sequência numérica

(a_n) que converge ao número "e"

Seja

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2,718 = e.$$

então fazendo $n = 1, 2, 3, \dots$, tem-se:¹

$$\begin{aligned} a_1 &= (1+1)^2 = 2 \\ a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \\ a_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \simeq 2,37 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Daí, continuando com o processo, segue-se que:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2,718\dots = e.$$

Cujo valor é aproximadamente

$$e \simeq 2,718281828459045235360287.$$

$\sin x = \text{sen } x$ (seno de x)

Período Fundamental :

$$f(x + K) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

o menor valor de $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ é chamado de período fundamental.

$\text{Im}(g)$: Imagem da função g .

Composições de n funções f e $f^0 = \mathbb{I}$ (identidade)

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n, \quad f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f \quad \text{e} \quad f^0 = \mathbb{I}.$$

Guarde bem e nunca esqueça!

Obter a composta de duas funções $f \circ g$ e $g \circ f$, antes é necessário, obter

¹O número "e" é uma constante matemática que é a base dos logaritmos naturais. Por vezes é chamado número de Euler (não confundir com a constante de Euler) em homenagem ao **matemático suíço Leonhard Euler**, número de Napier, em homenagem a **John Napier**, número de Neper, constante de Néper, número neperiano, número exponencial e outros. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2,711828\dots = e$$

o domínio de existência, caso sejam possíveis.

Função Inversa $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ Inverso da função: $\frac{1}{f}$

Cuidado com as Notações e simplificações:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \text{ com } a, b \geq 0$$

$$\sin^2(x) \neq \sin(x^2)$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) \neq f(x^2)$$

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

$$\sin(2x) \neq 2 \sin x$$

$$\frac{\sin(2x)}{x} \neq \sin 2$$

$$\ln^2(x) \neq 2 \ln(x) = \ln(x^2)$$

$$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b, \forall a, b > 0$$

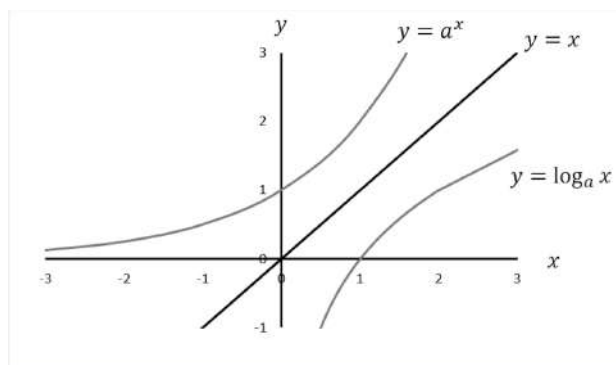
$$\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y|.$$

$$f(x) = a^x \text{ e } f^{-1}(x) = \log_a x$$

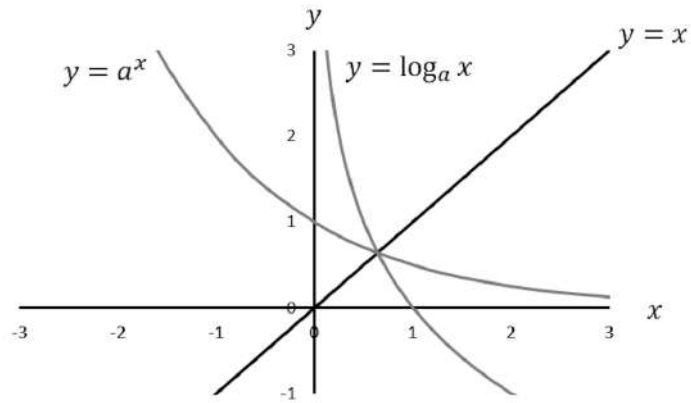
(i) $a > 1$: f é crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2.$$



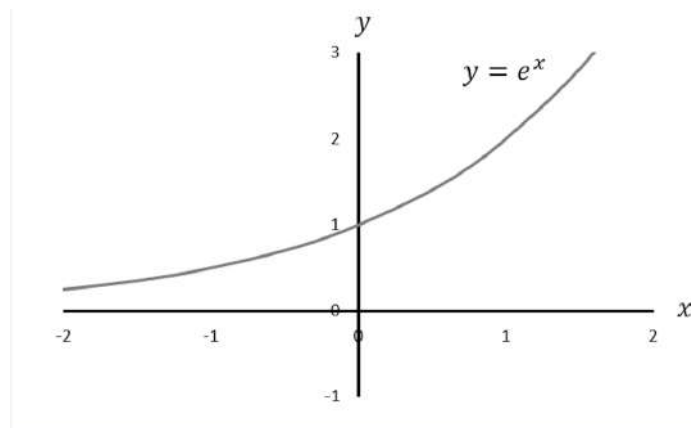
(ii) $0 < a < 1$: f é decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

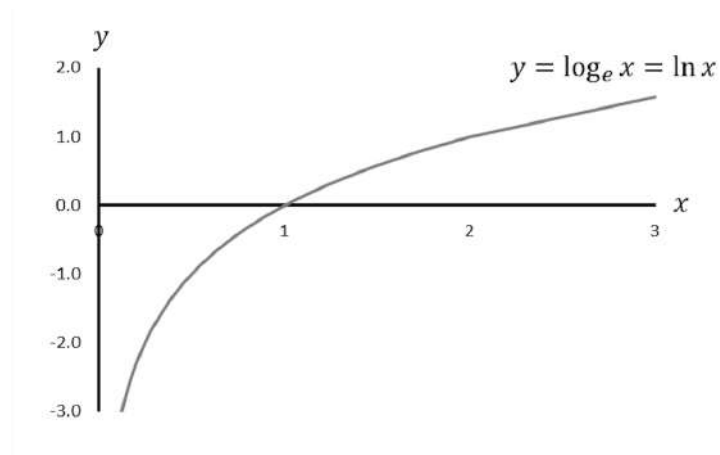


Funções Exponencial e logarítmica de base natural e

$f(x) = e^x$ (Função exponencial de base e)



$f(x) = \ln x = \log_e x$ (logaritmo natural ou neperiano de base e)



Em textos do Ensino Médio, é comum escrever $\log x = \log_{10} x$.

No nosso texto, adotaremos a mesma notação dos livros dos cursos de Cálculo sempre que o logaritmo de x for na base 10 será escrito:

$$\log_{10}(x) = \log_{10} x.$$

Reservaremos a notação para logaritmo natural de x na base "e", pondo:

$$\log_e(x) = \ln x.$$

Mudança de base para logaritmos

: $\forall a, b, x \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \neq 1$, temos:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demonstração A prova desta propriedade é algo bastante simples:

Seja $\log_b x = y$, então temos: $x = b^y$. Assim,

$$\log_a x = \log_a (b^y) = y \cdot \log_a b \iff y = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

De sorte que:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

■

Algumas propriedades:

Usando a mudança para base a do logaritmo dado, temos:

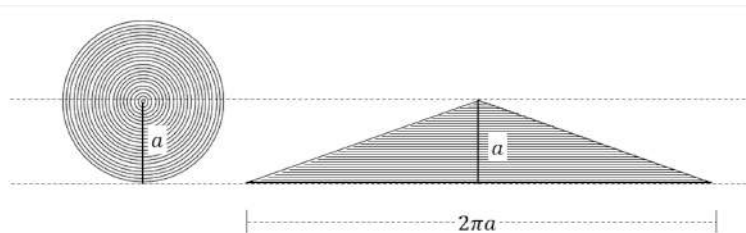
$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k} \cdot \log_a x, \text{ pois, } \log_a a = 1,$$

com $x, a, k \in \mathbb{R}$, $x, a > 0$ e $a \neq 1$.

Sejam $x_1, x_2, a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, então tem-se:

- (i) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2)$
- (ii) $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a (x_1) - \log_a (x_2).$

Usando o *Princípio de Cavalieri* para calcular as áreas do círculo e do triângulo, obtemos:



A base do triângulo corresponde ao comprimento da circunferência de raio "a" dada por: $B = 2\pi a$ e altura $H = a$. Logo,

$$A_1(\xi_1) = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{2\pi a \cdot a}{2} = \pi a^2 \text{ u.a. (unidade de área).}$$

Raiz n-ésima ou de ordem n

Sejam $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, e $n \geq 1$ um natural

$$b \in \mathbb{R}, b > 0 : b^n = a \iff b = \sqrt[n]{a}$$

b é a raiz n-ésima (ou de ordem n) positiva de a .



Observação

$$\begin{cases} a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ vezes}} \\ e \\ a^0 = 1, a \neq 0. \end{cases}$$

Algumas propriedades:

Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $m, n, k \geq 1$, com $m, n, k \in \mathbb{N}$ três naturais, temos então que:

$$P_1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad P_2. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad P_3. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$P_4. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad P_5. \quad \sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n} \quad P_6. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Fatos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ um natural

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\ (ii) \quad & a < b \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \end{aligned}$$

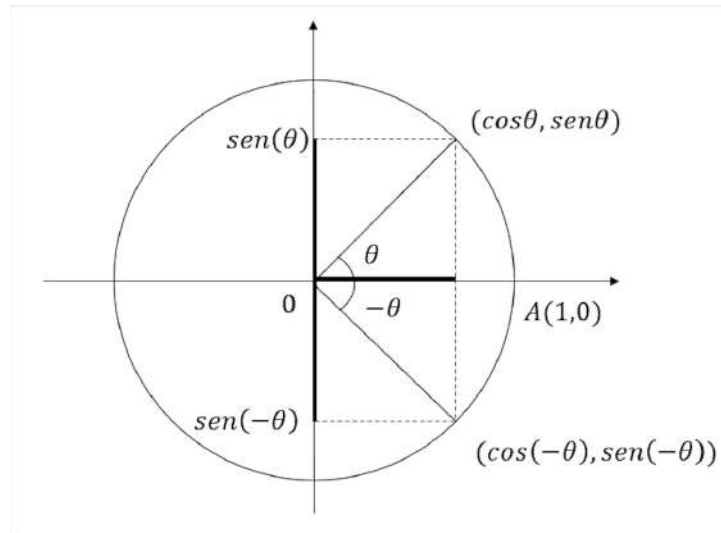
Exemplo 1.1

$$a) \quad \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad b) \quad 2 < 3 \iff \sqrt[6]{2} < \sqrt[6]{3}$$

$$c) \quad a^{10} \cdot a^3 = a^{10+3} = a^{13} \quad d) \quad \frac{a^{10}}{a^3} = a^{10-3} = a^7$$

$$e) \quad \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2 \cdot 2]{2^2} = \sqrt{2} \quad f) \quad \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{6}$$

Funções Pares e Ímpares:



$$(i) \cos(-\theta) = \cos \theta \quad (ii) \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

Consequências

$$(i) \sec(-\theta) = \sec \theta \quad (ii) \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$$

$$(iii) \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta \quad (iv) \operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg} \theta$$

Algumas notações sobre: Composições de Funções

Definições:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^0 = id \text{ (Identidade)} \\ f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \end{array} \right.$$

Em geral, temos:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

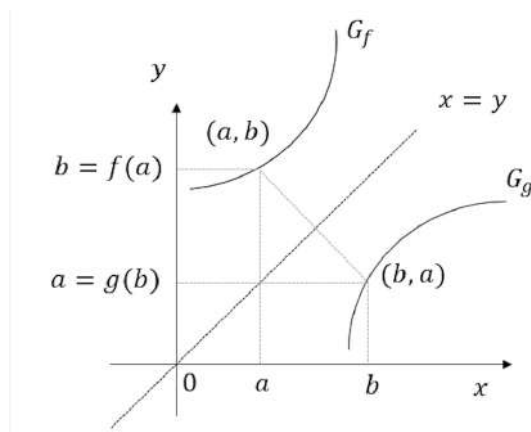
Vale a pena ressaltar que:

$$(a, b) \in G(f) \iff b = f(a)$$

$$\iff g(b) = g[f(a)] = a$$

$$\iff g(b) = a$$

$$\iff (b, a) \in G(g) = G(f^{-1}).$$



Os diagrama mostram

(i)

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{g} & X \\
 & \searrow & \downarrow f \\
 & & f \circ g \quad Y
 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow & \downarrow g \\
 & & g \circ f \quad X
 \end{array}$$

(iii) Cuidado!

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Função exponencial

$$\begin{array}{ccc}
 f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\
 x & \mapsto & f(x) = a^x
 \end{array}$$

com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Uma pausa para alguns questionamentos e comentários

Porquê das restrições a base a ?

Uma resposta comum de alguns: queremos a função exponencial admitindo inversa. Ora, estamos definindo uma função, as restrições devem bastar em si mesma. Vejamos de fato uma explicação plausível. A saber:

1. Na definição o que aconteceria se $a = 1$? A função é constante.

2. Se $a < 0$, ilustrativamente, escolha $a = -2$, então,

$$f(x) = (-2)^x.$$

Observe que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$$

$$f\left(\frac{2}{4}\right) = (-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2}$$

$$= \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}.$$

Daí, segue-se que: f não define uma função.

1.2 Metodo de Redução ao Absurdo

A prova por redução ao absurdo, consiste em:

$$P \implies Q \iff \sim Q \wedge P \implies \text{Contradição.}$$

Logo,

$$\sim(\sim Q) = Q \text{ é verdadeira}$$

Vejam as referências [2] e [6].

1.3 Notações para funções trigonométricas

1. *Função cosseno:*

$$f(x) = \cos x$$

2. *Função seno:*

$$f(x) = \sin x = \text{sen} x$$

3. *Função tangente:*

$$f(x) = \text{tg} x$$

4. *Função cotangente:*

$$f(x) = \text{cotg} x$$

5. *Função secante:*

$$f(x) = \text{sec} x$$

6. *Função cossecante:*

$$f(x) = \text{cossec} x$$

1.4 Notações para funções trigonométricas inversas

1. Função arcocosseno:

$$f(x) = \arccos x$$

2. Função arcoseno:

$$f(x) = \arcsin x$$

3. Função arcotangente:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

4. Função arcocotangente:

$$f(x) = \operatorname{arccotg} x$$

5. Função arcosecante:

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x$$

6. Função arcocosseccante:

$$f(x) = \operatorname{arccossec} x$$

1.5 Apêndice A

1. Dividir um número "a" em partes x_1, x_2, \dots, x_n proporcionais a:

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$. Prove que:

$$x_1 = \frac{aa_1}{\sum_{j=1}^n a_j}, x_2 = \frac{aa_2}{\sum_{j=1}^n a_j} \text{ e } x_n = \frac{aa_n}{\sum_{j=1}^n a_j}.$$

Demonstração

Com efeito, x_1, x_2, \dots, x_n é diretamente proporcional a $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, com que:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j = a.$$

Então, tem-se:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n} = B.$$

Consequentemente, temos:

$$\begin{cases} x_1 = Ba_1 \\ x_2 = Ba_2 \\ \vdots \\ x_n = Ba_n \end{cases} \implies \sum_{j=1}^n x_j = B \sum_{j=1}^n a_j \implies \frac{a}{\sum_{j=1}^n a_j} = B.$$

Daí, segue-se que:

$$x_1 = \frac{aa_1}{\sum_{j=1}^n a_j}, x_2 = \frac{aa_2}{\sum_{j=1}^n a_j}, \text{ e } x_n = \frac{aa_n}{\sum_{j=1}^n a_j}$$

2. (Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R})

Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N(0, 1)$ e $Q(u, 0)$ no plano. Mostre que, além do ponto N , essa reta corta a circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$ no ponto (x, y) , onde $x = \frac{2u}{u^2+1}$ e $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$. Em seguida, escreva as equações paramétricas da reta que passa por $N(0, 1)$ e pelo ponto $P(x, y)$ da circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$. Mostre que esta reta corta o eixo das abcissas no ponto $\xi(P) = (u, 0)$, onde $u = \frac{x}{1-y}$. A função $\xi : C \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\xi(P) = \xi(x, y) = u = \frac{x}{1-y},$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R} , cuja inversa

$$\begin{aligned} \xi^{-1} &: \mathbb{R} \rightarrow C \setminus \{N\} \\ u &\mapsto \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{aligned}$$

tal que:

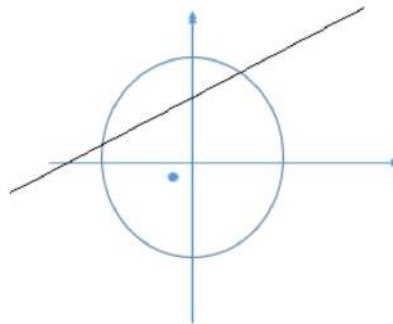
$$\begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}.$$

A função ξ chama-se a projeção estereográfica de $C \setminus \{N\}$ sobre \mathbb{R} , e sua inversa fornece uma outra parametrização da circunferência (exceto o "polo norte" N) por meio de funções racionais.

Demonstração

Projeção Estereográfica ξ e sua inversa ξ^{-1} em \mathbb{R}^2 .

A equação da circunferência dada por $C : x^2 + y^2 = 1$



(i) A equação da reta L que passa por $N(0, 1)$ e $Q(u, 0)$, é dada por:

$$X(t) = (x(t), y(t)), \text{ onde: } \begin{cases} x(t) = 0 + at \\ y(t) = 1 + bt, \end{cases}$$

sendo $v = (a, b) = \overrightarrow{NQ} = (u, -1)$ a direção de L .

Logo, $X(t) = (x(t), y(t)) = (ut, 1 - t)$, onde:

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (\text{I})$$

Afirmção: $L \cap C = \{P\}$, onde:

$$P(x, y).$$

Com efeito, $u^2 t^2 + (1 - t)^2 = 1$, então, temos: $(u^2 + 1)t^2 - 2t = 0$.

Portanto,

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{u^2 + 1} \quad (\text{II})$$

Agora, levando (II) em (I), obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + 1} \\ y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \end{cases}$$

De sorte que: $P(x, y) = \left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\right)$.

(ii) A equação da reta que passa por $N(0, 1)$ e $P\left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\right)$ cujo vetor diretor é $v_0 = \overrightarrow{NP}$ é descrita por:

$$L : \begin{cases} x_0 = 0 + \frac{2u}{u^2 + 1}t \\ y_0 = 1 - \frac{2}{u^2 + 1}t \end{cases}.$$

Agora, L corta o eixo xx em $Q(x_0, 0)$.

Portanto, $\xi(P) = \xi(x, y) = (u, 0)$,

onde $L : \begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \implies y = 1 - \frac{x}{u} \implies x = (1 - y)u \implies u = \frac{x}{1 - y}, y \neq 1$.

Consequentemente, vem:

A Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R} , ou seja, $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R} é um isomorfismo ($C \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R}$), onde:

$$\begin{aligned} \xi & : C \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \xi(x, y) = u = \frac{x}{1 - y}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} \xi^{-1} & : \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{aligned}$$

onde:

$$L : \begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2 + 1} \\ y(u) = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \end{cases}.$$

■

3. Projeção Estereográfica

São necessárias duas cartas locais no mínimo para cobrir a esfera. Além disso, tem-se: um *difeomorfismo local* (Não se preocupe com este nome sofisticado, tudo isso estudarão ao longo dos cursos de Cálculo)

Considere $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e sejam $N(0, 0, 1)$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1 & : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ (u, v) & \longmapsto \mathbb{X}_1(u, v) = (x, y, z). \end{aligned}$$

A equação da reta ξ que passa por $N(0, 0, 1)$ e $P(u, v, 0)$ na direção \overrightarrow{NP} , é dada por:

$$\xi : X = (0, 0, 1) + (u - 0, v - 0, -1)r \Leftrightarrow X = (ur, vr, 1 - r). \quad (I)$$

Agora, a intersecção da reta ξ com \mathbb{S}^2 é descrita por:

$$\begin{cases} X = (ur, vr, 1 - r) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \implies u^2 r^2 + v^2 r^2 + (1 - r)^2 = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$r = 0 \text{ ou } r = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}. \quad (II)$$

Decorre de (I) e (II) que: $\mathbb{X}_1(u, v) = (x, y, z)$, onde:
$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases}$$



Observação

A aplicação inversa de \mathbb{X}_1 ($\mathbb{X}_1^{-1} = \pi$) é chamada de *Projeção Estereográfica*.

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1^{-1} = \pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \mathbb{X}_1^{-1}(x, y, z) = (u, v) \end{aligned}$$

(i) A equação da reta γ que passa por $N(0, 0, 1)$ e $P_0(x, y, z)$ na direção do vetor $\overrightarrow{NP_0} = (x, y, z - 1)$, é dada por:

$$\gamma : X_0 = (0, 0, 1) + (x, y, z - 1)t \Leftrightarrow X = (xt, yt, 1 + (z - 1)t).$$

(ii) A intersecção da reta γ com o plano $\alpha : z = 0$, produz o seguinte resultado:

$$1 + (z - 1)t = 0 \implies t = \frac{1}{1 - z}, \text{ com } z \neq 1.$$

Assim,

$$X_0 = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right) \simeq \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right) = (u, v).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right). \end{aligned}$$



Observação

Será estudado em *Álgebra Linear*: $O \mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço vetorial \mathbb{U} de dimensão 2 do \mathbb{R}^3 . *Sugestão*: Por simplicidade tome $T(x, y) = (x, y, 0)$ é trivial que T é um isomorfismo. Vale ressaltar que: podemos fazer a seguinte identificação

$$(x, y) \simeq (x, y, 0).$$

(Não se preocupe com este nome sofisticado)

1.6 Fazendo Médias: Harmônica, Geométrica e Aritmética

George Pólya nasceu em Budapeste (em húngaro: Pólya György), Áustria-Hungria, de pais asquenazes, Anna Deutsch e Jakab Pólya que, posteriormente, se converteram ao catolicismo romano em 1886. Embora seus pais

fossem religiosos, Pólya foi batizado na Igreja Católica Romana e, posteriormente, tornou-se agnóstico. Pólya morreu em Palo Alto, Califórnia, Estados Unidos.

George Pólya, foi um matemático e professor de 1914 a 1940 no ETH Zürich na Suíça, e de 1940 a 1953 na Stanford University. Pólya permaneceu como professor emérito de Stanford o resto de sua vida e carreira. Trabalhou com uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade. Também é notável sua contribuição para a heurística em educação matemática.

Wikipédia, a enciclopédia livre. (Consultado em 18 de outubro de 2022 às 11h 45min)

A belíssima demonstração, a seguir, se deve a ele.

Problema 1.2

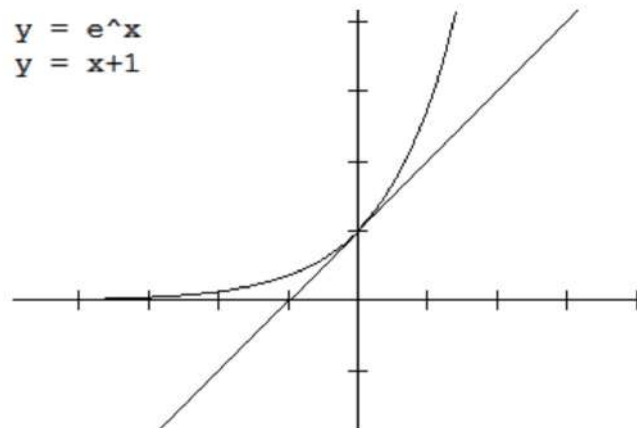
Sejam x_1, x_2, \dots, x_n números reais positivos, prove que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Sugestão:

Use o fato de que:

$$e^x \geq 1 + x, x \geq 0.$$



Demonstração

Basta observar que:

$$e^{\frac{x_j}{A}-1} \geq \frac{x_j}{A},$$

com $j = 1, 2, \dots, n$ e

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Vejam os

$$\begin{cases} e^{\frac{x_1}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} \\ e^{\frac{x_2}{A}-1} \geq \frac{x_2}{A} \\ \vdots \\ e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_n}{A} \end{cases} \implies \left\{ \left(e^{\frac{x_1}{A}-1} \right) \cdot \left(e^{\frac{x_2}{A}-1} \right) \dots e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} \cdot \frac{x_2}{A} \dots \frac{x_n}{A} \right.$$

$$\implies \left\{ e^{\overbrace{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{A}-n}^{=1}} \geq \frac{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}{A^n} \right.$$

Logo,

$$A \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} \iff \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

A primeira desigualdade é imediata, de fato:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}{n}.$$

Ou ainda,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}.$$

De sorte que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

1.7 Algumas Normas em \mathbb{R}^n :

Este tema, em geral, é abordado de forma detalhada, nos cursos de Geometria Analítica Vetorial.

(i) Norma Euclidiana:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

(ii) Norma da Soma:

$$\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

(iii) Norma do máximo (ou supremo):

$$\|x\|_\infty = \sup \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}.$$

(Em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes), em particular, em \mathbb{R}^n , temos:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n \|x\|_\infty.$$

1.8 Translações e Reflexões

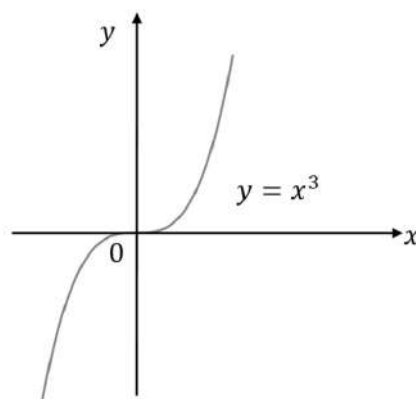
A) Translações

$$y_1 = f(x) \implies y_2 = f(x - k)$$

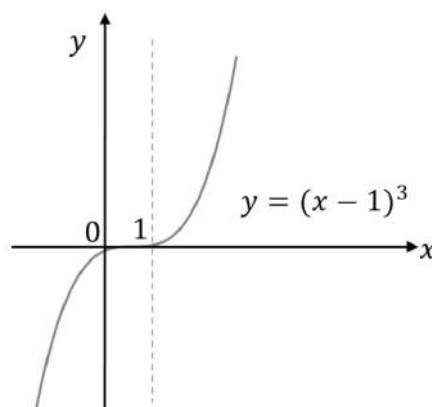
(i) $k > 0$: deslocamento à direita (ii) $k < 0$: deslocamento à esquerda

Exemplo 1.2

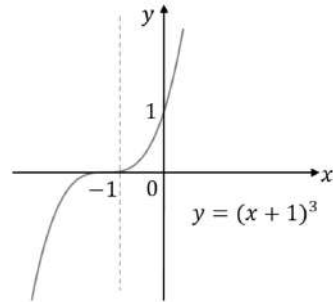
1. $f(x) = x^3$



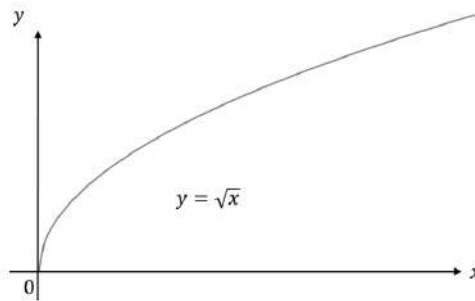
2. $f(x) = (x - 1)^3$



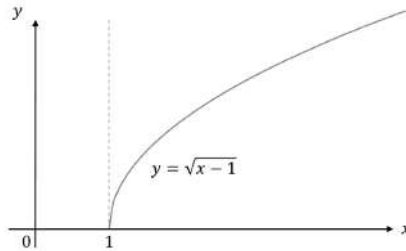
$$3. f(x) = (x + 1)^3 = (x - (-1))^3$$



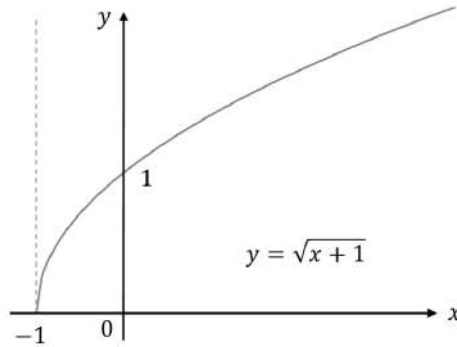
$$4. f(x) = \sqrt{x}$$



$$5. f(x) = \sqrt{x - 1}$$



$$6. f(x) = \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - (-1)}$$



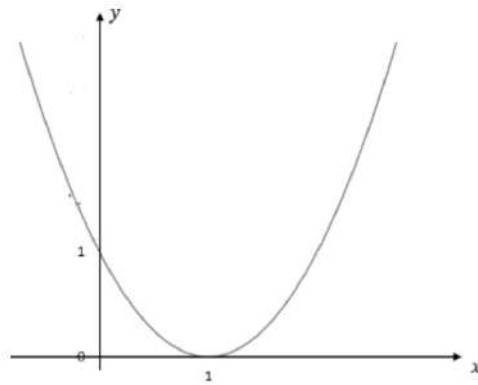
B) Translações

$$y_1 = f(x) \implies y_2 = f(x) + k$$

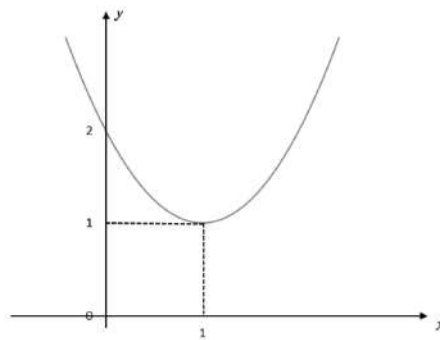
(i) $k > 0$: deslocamento para cima (ii) $k < 0$: deslocamento para baixo

Exemplo 1.3

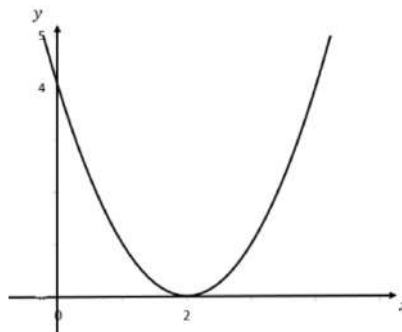
$$1. y_1 = f(x) = (x - 1)^2$$



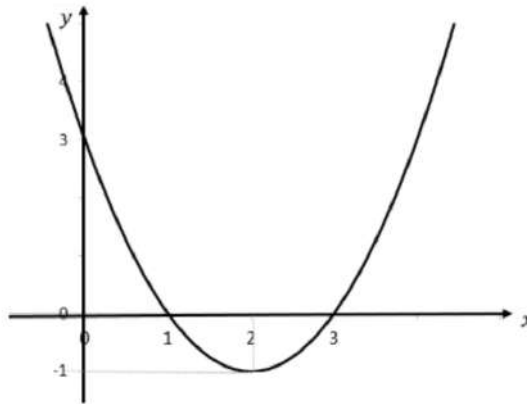
$$2. y_2 = f(x) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$



$$3. y_1 = f(x) = (x - 2)^2$$



$$4. y_2 = f(x) - 1 = (x - 2)^2 - 1$$

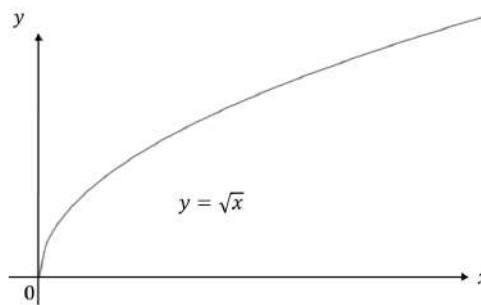


A) Reflexão em torno do eixo y :

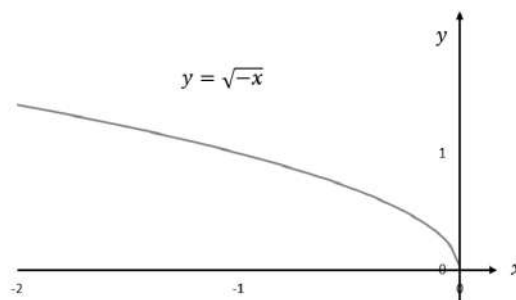
$$y_1 = f(x) \implies y_2 = f(-x)$$

Exemplo 1.4

$$1. y_1 = f(x) = \sqrt{x}$$



$$2. y_2 = f(-x) = \sqrt{-x}$$

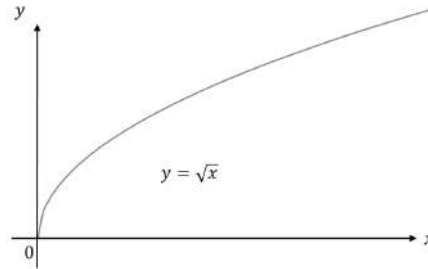


B) Reflexão em torno do eixo x :

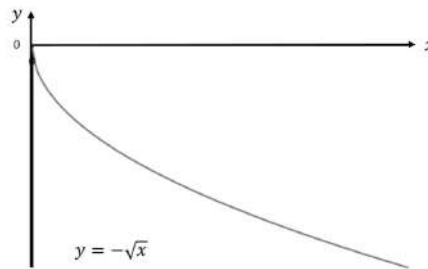
$$y_1 = f(x) \implies y_2 = -f(x)$$

Exemplo 1.5

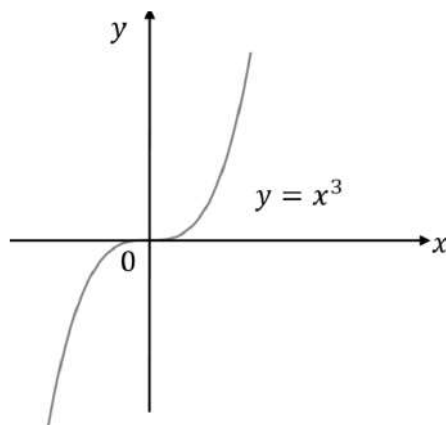
1. $y_1 = f(x) = \sqrt{x}$



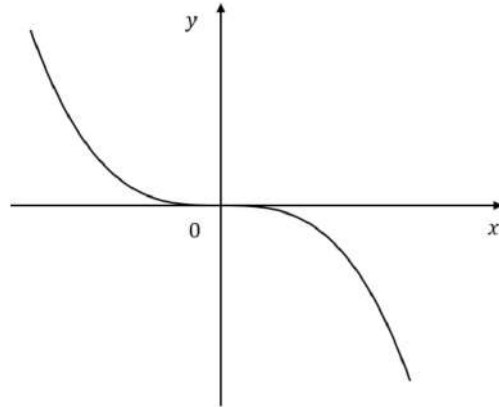
2. $y_2 = -f(x) = -\sqrt{x}$



3. $y_1 = f(x) = x^3$



$$4. y_2 = -f(x) = -x^3$$



1.9 Alfabeto Grego:

- A α (alfa)
- B β (beta)
- Γ γ (gama)
- Δ δ (delta)
- E ϵ (epsilon)
- Z ζ (zeta)
- H η (eta)
- Θ θ (teta)
- I ι (iota)
- K κ (capa)
- Λ λ (lambda)
- M μ (mu)
- N ν (nu)
- Ξ ξ (ksi)
- O \omicron (omicron)
- Π π (pi)
- P ρ (rô)
- Σ σ (sigma)
- Υ τ (tal)
- Y υ (upsilon)
- Φ ϕ (fi)
- X χ (chi)
- Ψ ψ (phi)
- Ω ω (omega)

Capítulo 2

A Máxima de George Pólya

“Não se pode fazer Matemática sem sujar as mãos”.



George Pólya Nasceu em Budapeste
(Hungria) (1887 – 1985)

”O luto é o preço do amor”

Ciência de Dados

A habilidade de trabalhar com, entender e usar dados tornou-se uma habilidade essencial na vida e uma exigência para um grupo de trabalhos e carreiras que estão se expandindo. Os dados estão por toda parte. Noventa por cento dos dados do mundo foi gerado nos últimos dois anos (Mar, 2018).

Neste capítulo, vamos usar o corpo ordenado completo com o nome básico de conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} , são definidas duas operações que satisfazem aos **axiomas ou postulados** (Veja ref [1]), como consequência teremos várias propriedades, onde: no conjunto se tem ordem dos elementos: podemos trabalhar com produtos notáveis, fatorações e racionalizações, módulo ou valor absoluto, desigualdades, casos particulares de equações polinomiais. Num primeiro momento, as demonstrações das propriedades podem deixar para um estudo posterior, quando se sentir mais seguro e precisar mergulhar; em águas mais profundas: se tratando de letramento matemático, se volta e estuda as demonstrações em detalhes. Ressaltando alguns aspectos históricos.

2.1 Aspectos Históricos

Frações simples foram usadas pelos egípcios por volta de 1000 a.C.; o védico "Shulba Sutras" ("As regras dos acordos") em, cerca de 600 a.C., incluiu o que pode ter sido o primeiro "uso" de números irracionais. O conceito de irracionalidade foi implicitamente aceito pelos primeiros matemáticos indianos desde Manava (750 – 690 a.C.), que sabiam que certos números como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{61}$ não podiam ser exatamente determinadas. Por volta de 500 a.C., os matemáticos gregos liderados por Pitágoras perceberam a necessidade de números irracionais, em particular a irracionalidade da $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de 2).

A Idade Média trouxe a aceitação de números zero e dos números negativos, inteiros e fracionários, primeiro pelos matemáticos indianos e chineses e depois pelos matemáticos árabes, que também foram os primeiros a tratar números irracionais como objetos algébricos, o que foi possível graças ao desenvolvimento de álgebra. Os matemáticos árabes fundiram os conceitos de "número" e "magnitude" em uma ideia mais geral de números reais. O matemático egípcio Abu Kamil (850 – 930 a.C.) foi o primeiro a aceitar números irracionais como soluções para equações quadráticas ou como coeficientes em uma equação, geralmente na forma de raízes quadradas, raízes cúbicas e raízes quartas.

No século *XVI*, Simon Stevin criou a base da notação decimal moderna e insistiu que não havia diferença entre números racionais e irracionais a esse respeito. No século *XVII*, **Descartes** introduziu o termo "**real**" para descrever as raízes de um polinômio, distinguindo-as das "*imaginárias*".

Nos séculos *XVIII* e *XIX*, houve muito trabalho sobre números irracionais e transcendentos. Johann Heinrich Lambert (1761) deu a primeira prova falha de que π não pode ser um número racional; Adrien-Marie Legendre (1794) completou a demonstração e mostrou que π não é a raiz quadrada de um número racional. Paolo Ruffini (1799) e Niels Henrik Abel (1842) construíram provas do teorema de Abel-Ruffini: que afirma que as equações gerais de grau cinco ou superior não podem ser resolvidas por uma fórmula geral que envolve apenas operações aritméticas e raízes.

Évariste Galois (1832) desenvolveu técnicas para determinar se uma determinada equação poderia ser resolvida por radicais, o que deu origem ao campo da teoria de Galois. Joseph Liouville (1840) mostrou que nem " e " nem " e^2 " podem ser a raiz de uma equação quadrática inteira e, então, estabeleceram a existência de números transcendentos; Georg Cantor (1873) estendeu e simplificou bastante. Charles Hermite (1873) provou que e é transcendente e Ferdinand von Lindemann (1882) mostrou que π é transcendente. A prova de Lindemann foi muito simplificada por Weierstrass (1885), sendo ainda mais por David Hilbert (1893) até que, finalmente, foi tornada elementar por Adolf Hurwitz e Paul Gordan.

O desenvolvimento do cálculo no século *XVIII* usou todo o conjunto de números reais sem defini-los de maneira clara. A primeira definição rigorosa foi publicada por *Georg Cantor* em 1871. Em 1874, ele mostrou que o conjunto de todos os números reais é não enumerável, mas o conjunto de todos os números algébricos é enumerável. Ao contrário das crenças amplamente difundidas, seu primeiro método não foi seu famoso argumento diagonal, publicado em 1891.

(*Wikipédia, a enciclopédia livre.*).

2.2 Estrutura, Ordem e Completeza de \mathbb{R}

$$\begin{array}{ll} \text{Adição: } + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{e} & \text{Multiplicação: } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x + y & & (x, y) \mapsto x \cdot y \end{array}$$

Axiomas

- 1 Associatividade: (i) $x + (y + z) = (x + y) + z$ e (ii) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- 2 Comutatividade: (i) $x + y = y + x$ e (ii) $x \cdot y = y \cdot x$
- 3 Elemento Neutro: (i) $x + 0 = x$ e (ii) $x \cdot 1 = x$
- 4 Elemento Inverso: (i) $x + (-x) = 0$ e (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ com } x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$.
- 5 Distributividade: $x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z, \in \mathbb{R}$.



Observação

Algumas notações:

$\forall =$ Para todo ou quaisquer que sejam e $\exists =$ Existe

2.2.1 Algumas consequências do corpo \mathbb{R}

i) Lei do Cancelamento:

$$\forall x, y, z, \in \mathbb{R} : (a) y + x = y + z \implies x = z \quad (b) y \cdot x = y \cdot z \text{ com } y \neq 0 \implies x = z.$$

Demonstração

(a) Com efeito, $\forall y \in \mathbb{R} : \exists (-y) \in \mathbb{R} : y + (-y) = 0$. Então,

$$y + x = y + z \implies [y + (-y)] + x = [y + (-y)] + z \implies x = z.$$

(b) Basta notar que: $\forall y \in \mathbb{R} : y \neq 0, \exists y^{-1} \in \mathbb{R} : y^{-1} \cdot y = y \cdot y^{-1} = 1$,

e, portanto,

$$y \cdot x = y \cdot z \implies (y^{-1} \cdot y) \cdot x = (y^{-1} \cdot y) \cdot z \implies x = z.$$

ii) $\forall x \in \mathbb{R} : (a) x \cdot 0 = 0$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (-x) \cdot (-y) = xy$.

Demonstração

(a) Com efeito, $x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ e $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$. Daí, vem:

$$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 \implies x \cdot 0 = 0.$$

(b) $(-x) \cdot (-y) = xy$.

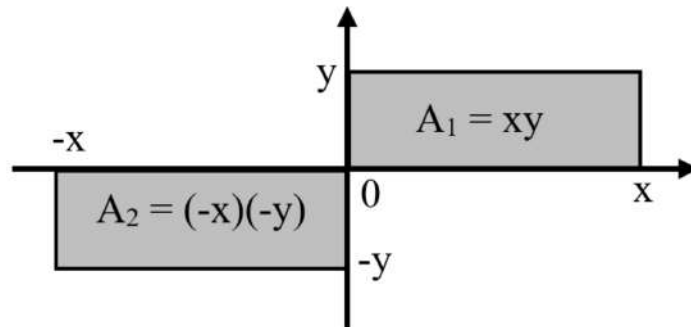
Demonstração

Não faremos uma prova; e sim, apenas uma ilustração gráfica, a saber:

As áreas limitadas pelos dois retângulos $A_1 = x \cdot y$ e $A_2 = (-x) \cdot (-y)$ são iguais, visto que: A_2 foi obtido por reflexão em torno da origem do retân-

gulo A_1 e, portanto,

$$x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$$



iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \implies x = 0$ ou $y = 0$.

Demostração

De fato, $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$, por conseguinte, obtemos:

$$x \cdot y = 0 \implies (x^{-1} \cdot x) \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot 0 \implies y = 0. \quad (1)$$

Analogamente, $\forall y \in \mathbb{R} : y \neq 0, \exists y^{-1} \in \mathbb{R} : y^{-1} \cdot y = 1$, temos:

$$y \cdot x = 0 \implies (y^{-1} \cdot y) \cdot x = (y^{-1} \cdot y) \cdot 0 \implies x = 0. \quad (2)$$

Decorre de (1) e (2) que: $x = 0$ ou $y = 0$. ■

iv) As equações

$$a + x = b \quad \text{e} \quad a \cdot x = b,$$

esta última com $a \neq 0$ tem solução única.

Demostração

$$a + x = b$$

Existência

De fato, $w = b - a$ é uma solução. Visto que:

$$w + a = (b - a) + a = b + [(-a) + a] = b. \quad \blacksquare$$

Unicidade

Agora, suponha que \bar{w} também é solução, então, temos:

$$\begin{cases} a + w = b \\ a + \bar{w} = b \end{cases} \implies a + w = a + \bar{w}.$$

Logo, $w = \bar{w}$. (única) ■

Demostração

$$ax = b.$$

Existência

De fato, $x_0 = a^{-1}b$ é uma solução. Visto que:

$$ax_0 = a \cdot (a^{-1}b) = (a \cdot a^{-1}) b = b.$$



Unicidade

Agora, suponha que \bar{x}_0 seja outra solução, então, temos:

$$\begin{cases} ax_0 = b \\ a\bar{x}_0 = b \end{cases} \implies ax_0 = a\bar{x}_0 \implies x_0 = \bar{x}_0.$$

Logo, $x_0 = \bar{x}_0$. (única)



2.2.2 Axioma de Ordem

Existe em \mathbb{R} um subconjunto \mathbb{R}^+ , com as seguintes propriedades:

- (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se: $(x + y) \in \mathbb{R}^+$ e $(x \cdot y) \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) Dado $x \in \mathbb{R}$. Então, tem-se: $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$ (*tricotomia*)

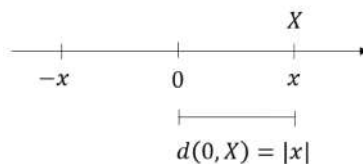
onde: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ e $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$ são respectivamente, os conjuntos dos números reais positivos e negativos.



Observação

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-.$$

$$x \in \mathbb{R}^+ \iff x > 0 \iff (-x) < 0 \iff (-x) \in \mathbb{R}^-.$$



$$\text{Ordem: } x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}^+ \iff y - x > 0$$

Propriedades

(i) **Transitiva:**

$$x < y \text{ e } y < z \implies x < z.$$

Demonstração

De fato,

$$\begin{cases} x < y \\ \text{e} \\ y < z \end{cases} \iff \begin{cases} (y - x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ (z - y) \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \implies (z - x) \in \mathbb{R}^+ \iff z > x.$$

(ii) **Monotonicidade:**

(a) $x < y$ e para todo $z \in \mathbb{R} \implies x + z < y + z$.

Demonstração

Basta notar:

$$\begin{cases} x < y \\ e \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} (y - x) \in \mathbb{R}^+ \\ e \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Logo,

$$[(y + z) - (x + z)] \in \mathbb{R}^+ \iff y + z > x + z.$$

(b) $x < y$ e $z > 0 \implies x.z < y.z$.

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{cases} x < y \\ e \\ z > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y - x) \in \mathbb{R}^+ \\ e \\ z \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \implies (yz - xz) \in \mathbb{R}^+ \iff yz > xz.$$

(c) $x < y$ e $z < 0 \implies x.z > y.z$.

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{cases} x < y \\ e \\ z < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y - x) \in \mathbb{R}^+ \\ e \\ (-z) \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \implies (xz - yz) \in \mathbb{R}^+ \iff xz > yz.$$

Exercício 2.1

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, tem-se: $x^2 > 0$

Demonstração

Basta considerar dois casos

1º Caso: $x > 0$

$$x \in \mathbb{R}^+ \iff x.x = x^2 \in \mathbb{R}^+ \iff x^2 > 0.$$

Analogamente, temos:

2º Caso: $x < 0$

$$(-x) \in \mathbb{R}^+ \iff (-x).(-x) = x^2 \in \mathbb{R}^+ \iff x^2 > 0.$$

De sorte que:

$$x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Exercício 2.2

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$, prove que:

A) $x < y \implies x^2 < y^2$.

Demonstração

De fato,

$$\begin{cases} x < y \\ e \\ x, y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-x) \in \mathbb{R}^+ \\ e \\ (y+x) \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \implies (y^2 - x^2) \in \mathbb{R}^+ \iff y^2 > x^2.$$

Destacando : $(y-x) \cdot (y+x) = y^2 - x^2$ (será provado posterioremnte)

B) $x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Demonstração

Basta observar:

$$\begin{cases} x < y \\ e \\ x, y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-x) \in \mathbb{R}^+ \\ e \\ \frac{1}{xy} \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \implies \left(\frac{y-x}{xy} \right) \in \mathbb{R}^+.$$

Portanto,

$$\left(\frac{y-x}{xy} \right) \in \mathbb{R}^+ \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

C) Determine $x \in \mathbb{R}$, tal que: $5x + 3 < 2x + 8$.

Solução

$$\begin{aligned} 5x + 3 < 2x + 8 &\iff 5x + (3 - 3) < 2x + (8 - 3) \\ &\iff 5x < 2x + 5 \iff 5x - 2x < 5 \iff 3x < 5 \\ &\iff x < \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

D) estude o sinal da expressão: $y = x - 4$

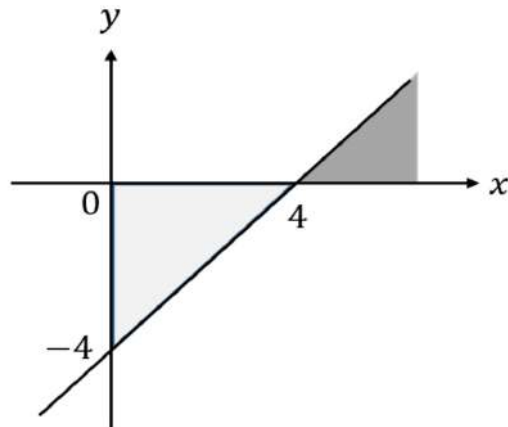
(i) $x - 4 > 0 \iff x > 4$

(ii) $x - 4 = 0 \iff x = 4$

(iii) $x - 4 < 0 \iff x < 4$.

Solução

Esboçando o gráfico, $y = x - 4$, temos:



E) Seja a um número inteiro. Prove que:

(i) a é ímpar $\implies a^2$ também é ímpar.

(ii) a é par $\implies a^2$ continua par.

Demonstração

(i) Seja $a = 2k + 1$ um número inteiro ímpar, então, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2n + 1, \end{aligned}$$

com $n = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$.

Logo, " a^2 " é ímpar. ■

(ii) Analogamente, se $a = 2k$ é par, tem-se:

$$a^2 = (2k)^2 = 2(2k^2) = 2n_1, \text{ onde: } n_1 = 2k^2,$$

e, portanto, " a^2 " continua um número inteiro par. ■

2.2.3 Fatoração

Dizemos que uma expressão \mathbb{E} está na forma fatorada, se existem E_1, E_2, \dots, E_n ; com $m.d.c.(E_1, E_2, \dots, E_n) = 1$, tais que:

$$\mathbb{E} = E_1 \cdot E_2 \dots E_n.$$

Exemplo 2.1

Fatore: $\mathbb{E} = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Solução

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Exemplo 2.2

Fatore: $\mathbb{E} = A^2 - B^2$.

Solução**Observação**

$$\mathbb{E} = A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

(Será provado em seguida)

Exemplo 2.3

Fatore: $\mathbb{E} = x^3 + y^3$.

Solução

Com efeito,

$$\mathbb{E} = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Será provado em seguida, com os axiomas do conjunto dos números reais.

Exemplo 2.4

(i) Fatore: $\mathbb{E} = (x + h)^2 - (x - h)^2$.

Solução

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \\ &= (x + h)^2 - (x - h)^2 \\ &= [(x + h) - (x - h)] \cdot [(x + h) + (x - h)] \\ &= 2h \cdot 2x = 4xh. \end{aligned}$$

(ii) Seja $f(x) = x^2$, supondo $h \neq 0$, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{h}$$

Solução

Com efeito, $f(\square) = (\square)^2$, $f(x + h) = (x + h)^2$ e $f(x - h) = (x - h)^2$, então, temos:

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{h} = \frac{(x + h)^2 - (x - h)^2}{h} = \frac{4xh}{h} = 4x.$$

2.2.4 Produtos Notáveis

$$P_1) \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ temos: } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Demonstração

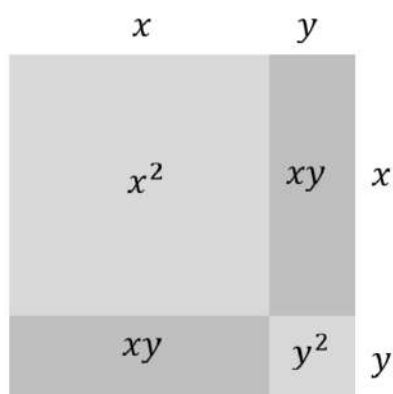
Facilmente, temos:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y) \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

A área do quadrado da soma de dois termos, pode ser interpretado como soma das áreas de dois quadrados x^2 e y^2 conjuntamente com as áreas de dois retângulos $xy + yx = 2xy$.



$$P_2) \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ temos: } (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Demonstração

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &= (x - y)(x - y) = x(x - y) - y(x - y) \\ &= x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2. \end{aligned}$$

De sorte que:

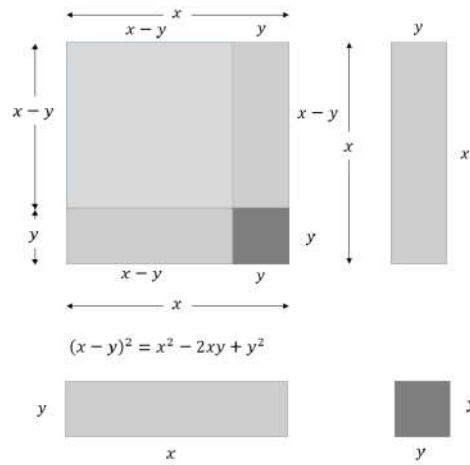
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

$$P_3) \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ temos: } (x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Demonstração

De fato,

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y) &= x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - yx - y^2. \\ &= x^2 + xy - yx + y^2 = x^2 - y^2. \end{aligned}$$



De sorte que:

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Atenção!!

$(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$

Exemplo

$(3 + 5)^2 \neq 3^2 + 5^2$

Justificativa

$(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$

$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

Observação

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = x + y. \blacksquare$$

Aplicação:

Calcule a expressão e simplifique, com $h \neq 0$:

$$\frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

1º modo: $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= 2x + h. \end{aligned}$$

2º modo: $(x + h)^2 - x^2 = [(x + h) - x][(x + h) + x]$. Daí, vem:

$$\frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{h[(x + h) + x]}{h} = 2x + h.$$

$P_4) \forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2) \\ &= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - y^3. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3.$$



Observação

Se $x \neq y$, então, temos:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} = x^2 + xy + y^2.$$

$P_5) \forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned} (x + y)(x^2 - xy + y^2) &= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2) \\ &= x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 \end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$



Observação

Se $x \neq -y$, então, temos:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y} = x^2 - xy + y^2.$$

Aplicação:

Calcule e simplifique, com $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

1º modo: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2. \end{aligned}$$

2º modo: $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$. Assim,

$(x+h)^3 - x^3 = [(x+h) - x] [(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]$. Por conseguinte, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \frac{h[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h} \\ &= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2. \end{aligned}$$

Para facilitar a compreensão, vamos mostrar que:

$$(x+h)^2 + (x+h)x + x^2 = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (x+h)^2 + (x+h)x + x^2 &= x^2 + 2xh + h^2 + x^2 + xh + x^2 \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2. \end{aligned}$$

Problema 2.1

(A) Sejam x, y números reais positivos. Prove que:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Demonstração

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tais que: $x, y > 0$, temos:

$$x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y.$$

Em quaisquer dos casos, tem-se:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 \geq 0 &\iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\ &\iff (x+y)^2 \geq 4xy \iff xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \iff \sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}} \iff \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} &\leq \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \iff \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}} \\ &\iff \frac{\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}}{2} \leq \sqrt{xy}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Agora, de (2.1) e 2.2), segue-se que:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

■

(B) Mostre que

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

está compreendido entre o menor e o maior dos números $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$, desde que: b_1, b_2, \dots, b_n sejam todos positivos.

Demonstração

Sejam $b_j > 0$ com $j = 1, 2, \dots, n$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, então temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq \frac{a_1}{b_1} \leq M \\ m \leq \frac{a_2}{b_2} \leq M \\ \vdots \\ m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq M \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} mb_1 \leq a_1 \leq Mb_1 \\ mb_2 \leq a_2 \leq Mb_2 \\ \vdots \\ mb_n \leq a_n \leq Mb_n. \end{array} \right.$$

Dito de outro modo, temos:

$$m(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

Logo,

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq M \implies m \leq \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n b_j} \leq M.$$

■

(Por simplicidade faça o caso $n = 2$)

(C) Sejam a, b e c pertencentes a \mathbb{R} . Prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Demonstração

Com efeito, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca. \end{array} \right. \quad (I)$$

Agora, somando membro a membro as desigualdades de (I), obtemos:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac).$$

De sorte que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

■

Aplicação

Calcule e simplifique:

$$(i) \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} \quad (ii) \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \quad (iii) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \quad (iv) \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} \quad (v) \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

Fatos que Ajudam:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) \\ x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2) \\ x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2) \\ (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a - x}{xa} = \frac{-(x - a)}{xa} \end{array} \right. .$$

Daí, vem:

$$(i) \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{(x - a)(x + a)}{(x - a)(x^2 + xa + a^2)} = \frac{x + a}{x^2 + xa + a^2}, \quad x \neq a$$

$$(ii) \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{\frac{1 - x}{x}}{x - 1} = \frac{-(x - 1)}{x} \cdot \frac{1}{(x - 1)} = \frac{-1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ e } x \neq 1$$

$$(iii) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{-(x - a)}{xa} = \frac{-(x - a)}{xa} \cdot \frac{1}{(x - a)} = \frac{-1}{xa}, \quad x \neq a \neq 0.$$

$$(iv) \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2x + 3} = 2x - 3, \quad x \neq \frac{-3}{2}$$

$$(v) \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1^2)}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1.$$

■

Proposição 2.1

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e n um número inteiro positivo, tal que: $n \geq 2$. Então, tem-se:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \dots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1})$$

■

Demonstração

Daniel Cordeiro de Morais, Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3ª Ed.,SBM, 2016 ref.[1] sobre indução finita sobre \mathbb{N}

Alguns Casos Particulares da proposição 2.1

Não faremos uma demonstração, apenas exemplos, de casos particulares:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x - y) \cdot (x + y) \\x^3 - y^3 &= (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) \\x^4 - y^4 &= (x - y) \cdot (x^3y^0 + x^2y^1 + xy^2 + x^0y^3) \\x^5 - y^5 &= (x - y) \cdot (x^4y^0 + x^3y^1 + x^2y^2 + xy^3 + x^0y^4) \\x^6 - y^6 &= (x - y) \cdot (x^5y^0 + x^4y^1 + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + x^0y^5) \\x^7 - y^7 &= (x - y) \cdot (x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + x^0y^6).\end{aligned}$$

Assim, continuando com o processo, obtemos:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \dots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1})$$



Observação

À medida que o expoente de x decresce de $n - 1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y , só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 até $n - 1$.

Exemplo 2.5

Seja $f(x) = x^n$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

Solução

Decorre da proposição anterior que:

$$x^n - 1^n = (x - 1) \cdot (x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \dots + x1^{n-2} + x^01^{n-1}).$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{x^n - 1^n}{x - 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \dots + x1^{n-2} + x^01^{n-1})}{x - 1} \\&= x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \dots + x1^{n-2} + x^01^{n-1} \\&= x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.\end{aligned}$$

Vale a pena observar: o expoente de x decresce de $n - 1$ até 0, ou seja, teremos n termos.

De sorte que:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$



Exemplo 2.6

Seja $f(x) = x^4$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+1) - f(1)}{x}, \quad x \neq 0.$$

Solução

Se $f(x) = x^4$, então, $f(\square) = (\square)^4$ e $f(x+1) = (x+1)^4$. Assim,

$$\frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \frac{(x+1)^4 - 1}{x}.$$

Agora, da proposição 2.1 sabemos:

$$x^4 - y^4 = (x - y) \cdot (x^3y^0 + x^2y^1 + xy^2 + x^0y^3)$$

$$(x+1)^4 - 1^4 = [(x+1) - 1] \left[(x+1)^3 1^0 + (x+1)^2 1^1 + (x+1)^1 1^2 + (x+1)^0 1^3 \right].$$

Daí segue-se:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} &= \frac{(x+1)^4 - 1}{x} = \frac{x \left[(x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1 \right]}{x} \\ &= (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.2

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e n um número inteiro positivo ímpar, tal que: $n \geq 3$. Então, tem-se:

$$x^n + y^n = (x + y) \cdot (x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \dots + xy^{n-2} - x^0y^{n-1})$$

**Demonstração**

(Daniel Cordeiro de Moraes, Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3ª Ed., SBM, 2016 ref.[1] sobre indução finita sobre \mathbb{N})

Alguns Casos Particulares da proposição 2.2

Não faremos uma demonstração, apenas exemplos, de casos particulares:

$$x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$$

$$x^5 + y^5 = (x + y) \cdot (x^4y^0 - x^3y^1 + x^2y^2 - xy^3 + x^0y^4)$$

$$x^7 + y^7 = (x + y) \cdot (x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + x^0y^6)$$

$$x^9 + y^9 = (x + y) \cdot (x^8y^0 - x^7y^1 + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + x^0y^8).$$

Assim, continuando com o processo, obtemos:

$$x^n + y^n = (x + y) \cdot (x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \dots - xy^{n-2} + x^0y^{n-1})$$

**Observação**

À medida que o expoente de x decresce de $n - 1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y , só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 até $n - 1$. Além disso, os sinais são alternados.

Exemplo 2.7

Seja $f(x) = x^9$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}, \quad x \neq -1.$$

Solução

Decorre da proposição anterior que:

$$\begin{aligned} x^9 + y^9 &= (x + y) \cdot (x^8y^0 - x^7y^1 + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + x^0y^8) . \\ x^9 - (-1)^9 &= x^9 + 1 = (x + 1) \cdot (x^81^0 - x^71^1 + \dots - x1^7 + x^01^8) . \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(1)}{x + 1} &= \frac{x^9 + 1^9}{x + 1} = \frac{(x + 1) \cdot (x^81^0 - x^71^1 + \dots - x1^7 + x^01^8)}{x + 1} \\ &= (x^81^0 - x^71^1 + \dots - x1^7 + x^01^8) \end{aligned}$$

Vale a pena observar: o expoente de x decresce de 8 até 0, ou seja, teremos 9 termos.

De sorte que:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Os sinais são alternados e notemos: os termos de expoente ímpares são negativos. ■

Exemplo 2.8

Seja $f(x) = x^3$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}, \quad x \neq -2.$$

Solução

Se $f(\square) = (\square)^3$, $f(x) = x^3$ e $f(-2) = (-2)^3 = -8$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \frac{x^3 - (-8)}{x + 2} = \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x + 2) \cdot (x^2 - x \cdot 2 + 2^2)}{x + 2} \\ &= x^2 - 2x + 4. \end{aligned}$$

■

2.2.5 Racionalização**Fator Racionalizante**

Chama-se fator racionalizante de uma expressão I , a outra expressão R , tal que:

$$I \cdot R$$

seja uma expressão sem radical.

Exemplo 2.9

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x}$.

Solução

Seja $R = \sqrt[3]{x^2}$, então, facilmente, obtemos:

$$I.R = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

■

Exemplo 2.10

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt{x} - \sqrt{a}$

Solução

Seja $R = \sqrt{x} + \sqrt{a}$, então, tem-se:

$$I.R = (\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a}) = x - a.$$

■

Cálculos Auxiliares:

$$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2 = x - a, \text{ pois } x, a \geq 0.$$

O fator racionalizante, neste caso,

$$R = \sqrt{x} + \sqrt{a}.$$

Exemplo 2.11

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}$.

Solução

Basta observar que:

$$(A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

$$(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right] = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = x - a. \text{ O fator racionalizante, neste caso,}$$

$$R = \left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right].$$

Logo,

$$I.R = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right] = x - a.$$

■

Exemplo 2.12

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}$.

Solução

Basta observar que:

$$(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

$$(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right] = (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{a})^3 = x + a.$$

O fator racionalizante, neste caso,

$$R = \left[(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right].$$

Logo,

$$I \cdot R = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right] = x + a.$$

Exercício 2.3

Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

onde:

$$1) f(x) = ax + b \quad 2) f(x) = x^2 + x \quad 3) f(x) = \frac{1}{x} \quad 4) f(x) = x^3 + 1 \\ 5) f(x) = -2x \quad 6) f(x) = x^2 + 1 \quad 7) f(x) = \sqrt{x} \quad 8) f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Solução

1) Consideremos dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$

1º Caso: $a = 0$: $f(\square) = b$. (note que qualquer valor do "quadrado"

o resultado será sempre b).

Ilustrativamente, $f(\square) = f(x+k+n) = b$ e $f(\square) = f(x+h) = b$. Assim,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b - b}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

2º Caso: $a \neq 0$: $f(\square) = a\square + b$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[a(x+h) + b] - (ax + b)}{h} = \frac{ax + ah - ax}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

2) $f(x) = x^2 + x$, $f(\square) = (\square)^2 + (\square)$. (Observe que o "quadrado" é apenas um símbolo representando o significado.

$$f(k) = k^2 + k, f(\triangle) = (\triangle)^2 + (\triangle), f(x+h) = (x+h)^2 + (x+h).$$

Além disso, fazendo alguns cálculos auxiliares, obtemos:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x) \\
 &= x^2 + 2xh + h^2 + h - x^2 \\
 &= h(2x + h + 1).
 \end{aligned}$$

Por conseguinte, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} = \frac{h(2x + h + 1)}{h} \\
 &= 2x + h + 1.
 \end{aligned}$$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, usando a mesma ideia do "quadrado" $f(\square) = \frac{1}{\square}$.
 $f(k) = \frac{1}{k}$, $f(\Delta) = \frac{1}{\Delta}$, $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$. Daí vem:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h)x}.$$

4) $f(x) = x^3 + 1$, usando a mesma ideia do "quadrado" $f(\square) = (\square)^3 + 1$.

Para ilustração, vamos simular alguns valores para o "quadrado"

$f(x+t+1) = (x+t+1)^3 + 1$, $f(\Delta) = (\Delta)^3 + 1$ e $f(x+h) = (x+h)^3 + 1$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^3 + 1] - [x^3 + 1]}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
 &= \frac{[(x+h) - x] [(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h} \\
 &= \frac{h [(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h} \\
 &= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2 \\
 &= 3x^2 + 3xh + h^2.
 \end{aligned}$$

5) $f(x) = -2x$ usando a mesma figurinha do "quadrado" $f(\square) = -2(\square)$.

$f(\Delta) = -2\Delta$, $f(x+t+k) = -2(x+t+k)$ e $f(x+h) = -2(x+h)$.

Atenção especial no cálculo $-f(x) = -[-2x] = 2x$

$f(x+h) - f(x) = -2(x+h) - [-2x] = -2x - 2h + 2x = -2h$.

De sorte que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2(x+h) - [-2x]}{h} = \frac{-2h}{h} = -2.$$

6) $f(x) = x^2 + 1$, a ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si $f(\square) = (\square)^2 + 1$. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+t+1) = (x+t+1)^2 + 1 \text{ e } f(x+h) = (x+h)^2 + 1.$$

Voltando ao problema inicial, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{[(x+h) - x][(x+h) + x]}{h} = \frac{h[2x+h]}{h} \\ &= 2x+h. \end{aligned}$$

7) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(\square) = \sqrt{\square}$.

A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si. Ilustrando a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p) = \sqrt{x+p}, f(\triangle) = \sqrt{\triangle} \text{ e } f(x+h) = \sqrt{x+h}.$$

Voltando ao problema dado, tem-se:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Vejamos um argumento de mudanças de variáveis, façamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x+h} \\ e \\ k = \sqrt{x} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} t^2 = x+h \\ e \\ k^2 = x \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} t^2 - k^2 = h \\ e \\ k^2 = x. \end{array} \right.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{t-k}{t^2 - k^2} = \frac{t-k}{(t-k)(t+k)} \\ &= \frac{1}{t+k} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} (A-B) \cdot (A+B) &= A^2 - B^2 \\ &= (\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2 \\ &= x+h - x = h. \end{aligned}$$

Óbvio, sendo $x > 0$ e $h > 0$ (**porquê não consideramos** $x \geq 0$ e $h \geq 0$?).

Agora, procedendo usando a racionalização, obtemos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) &= (\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2 = x+h - x = h \\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$8) f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot f(\square) = \sqrt[3]{\square}.$$

A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra que usamos. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p) = \sqrt[3]{x+p}, f(\triangle) = \sqrt[3]{\triangle} \text{ e } f(x+h) = \sqrt[3]{x+h}.$$

Voltando ao delineado, temos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}.$$

Poderia usar racionalização. Vejamos usando mudanças de variáveis, tem-se:

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{x+h} \\ e \\ k = \sqrt[3]{x} \end{cases} \implies \begin{cases} t^3 = x+h \\ e \\ k^3 = x \end{cases} \implies \begin{cases} t^3 - k^3 = h \\ e \\ k^3 = x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \frac{t - k}{t^3 - k^3} = \frac{t - k}{(t - k)(t^2 + tk + k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2 + tk + k^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Observe que:

Determinando o **fator racionalizante**, tem-se:

$$\begin{aligned} (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2) &= A^3 - B^3 \\ (\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 \right] &= (\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3 \\ &= x+h - x = h. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}) \cdot \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} \right)}{h \cdot \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

 **Exercício 2.4**

Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $x \neq a$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

onde:

$$1) f(x) = kx + b \quad 2) f(x) = x^2 + x \quad 3) f(x) = \frac{1}{x} \quad 4) f(x) = x^3 + 1$$

$$5) f(x) = -2x \quad 6) f(x) = x^2 + 1 \quad 7) f(x) = \sqrt{x} \quad 8) f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Solução

1) Consideremos dois casos: $k = 0$ e $a \neq 0$

1º Caso: $a = 0$: $f(\square) = b$. (note que qualquer valor do "quadrado" o resultado será sempre b).

Ilustrativamente, $f(\square) = f(x + n + 1) = b$ e $f(\triangle) = b$. Desta forma, obtemos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{b - b}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0.$$

2º Caso: $k \neq 0$: $f(\square) = k\square + b$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{kx + b - (ka + b)}{x - a} = \frac{k(x - a)}{x - a} = k.$$

2) $f(x) = x^2 + x$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^2 + x - (a^2 + a)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a) + (x - a)}{x - a} \\ &= \frac{(x - a)[(x + a) + 1]}{x - a} = x + a + 1. \end{aligned}$$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{\frac{-(x - a)}{xa}}{x - a} = \frac{-(x - a)}{xa} \cdot \frac{1}{(x - a)} \\ &= \frac{-1}{xa}, \quad x \neq a \neq 0. \end{aligned}$$

4) $f(x) = x^3 + 1$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

$$5) f(x) = -2x$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-2x - (-2a)}{x - a} = \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2.$$

$$6) f(x) = x^2 + 1$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + 1 - (a^2 + 1)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

$$7) f(x) = \sqrt{x}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}.$$

Agora, façamos as mudanças de variáveis, tem-se:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ e \\ k = \sqrt{a} \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 = x \\ e \\ k^2 = a. \end{cases}$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^2 - k^2} = \frac{t - k}{(t - k)(t + k)} \\ &= \frac{1}{t + k} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Este processo é o mesmo; neste caso, que racionalizar.

$$8) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}. \quad (1)$$

Assim, fazendo as mudanças de variáveis necessárias, vem:

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{x} \\ e \\ k = \sqrt[3]{a} \end{cases} \implies \begin{cases} t^3 = x \\ e \\ k^3 = a. \end{cases} \quad (2)$$

Daí, levando (2) em (1), segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^3 - k^3} = \frac{t - k}{(t - k)(t^2 + tk + k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2 + tk + k^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}. \end{aligned}$$

Problema 2.2

Calcule e simplifique em cada caso:

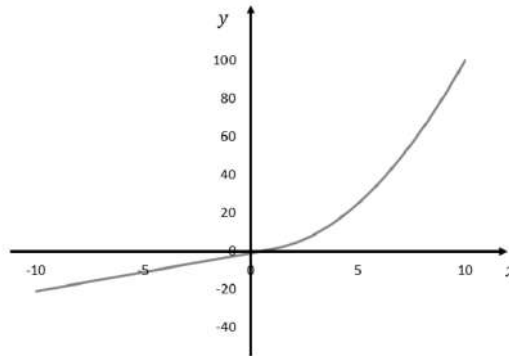
$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \text{ com } x \neq 1,$$

onde:

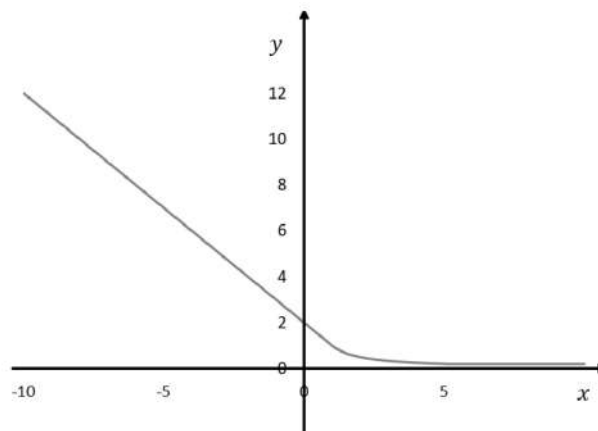
$$(i) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases} \quad (ii) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -x + 2, & x \leq 1. \end{cases}$$

Esboçando os gráficos em cada caso, temos:

(i)



(ii)



(i) 1º Caso: $x \geq 1 : f(1) = 1^2$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x - 1$$

2º Caso: $x < 1 : f(1) = 1^2$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto dado $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x - 1 - 1^2}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2.$$

(ii) 1º Caso: $x > 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$.

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{x - 1} = \frac{-(x - 1)}{x} \cdot \frac{1}{(x - 1)} = -\frac{1}{x}$$

2º Caso: $x \leq 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto, neste caso $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-x + 2 - 1}{x - 1} = \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1.$$

Problema 2.3

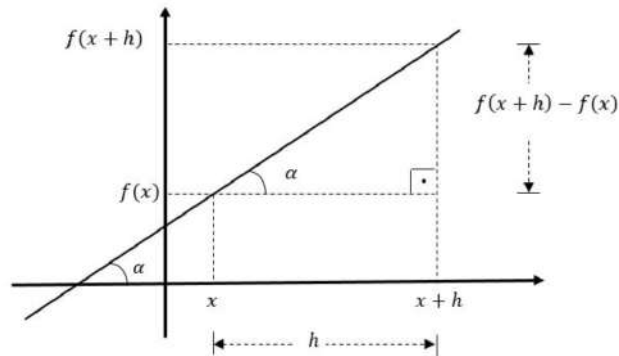
(A) Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0,$$

onde:

$$(i) f(x) = 2x + 4 \quad (ii) f(x) = x^2 \quad (iii) f(x) = x^3.$$

(Dê uma interpretação geométrica para q)¹



A inclinação da reta que passa pelos pontos distintos $P(x, f(x))$ e $Q(x+h, f(x+h))$ chamada posteriormente de quociente de Newton é de fundamental importância para o Cálculo, será dada por:

$$q(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Solução

$$(i) f(x) = 2x + 4$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[2(x+h) + 4] - (2x + 4)}{h} = \frac{2x + 2h - 2x}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

¹Há 300 anos, os grandes cientistas Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (que também era filósofo) travavam uma célebre disputa pela paternidade do cálculo infinitesimal. Por causa desta controvérsia, Newton declarou a famosa frase: "Os segundos inventores não têm direitos".

O que o torna o cálculo infinitesimal tão versátil é a grande variedade de áreas em que pode ser aplicado, como na matemática, na física, na tecnológica e na economia. A derivada é, por exemplo, um conceito fundamental da física, pois explica acelerações, velocidades instantâneas e forças.

O conflito chamou atenção por mostrar o que havia "nos bastidores" da matemática e como esses gênios se comportavam. Newton se apresentou como religioso e vingativo, enquanto Leibniz era mais sibilante e incisivo, embora menos obsecado e até menos brincalhão.

A disputa teve seu fim em 1727, com a morte de Newton. O que se sabe com certeza é que ambos descobriram o cálculo infinitesimal de maneira independente e publicaram em momentos diferentes da vida.

$$(ii) f(x) = x^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{[(x+h) - x][(x+h) + x]}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h.$$

$$(iii) f(x) = x^3$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{[(x+h) - x][(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h} \\ &= \frac{h[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h} = (x+h)^2 + (x+h)x + x^2. \end{aligned}$$

(B) Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ com } x \neq a,$$

onde:

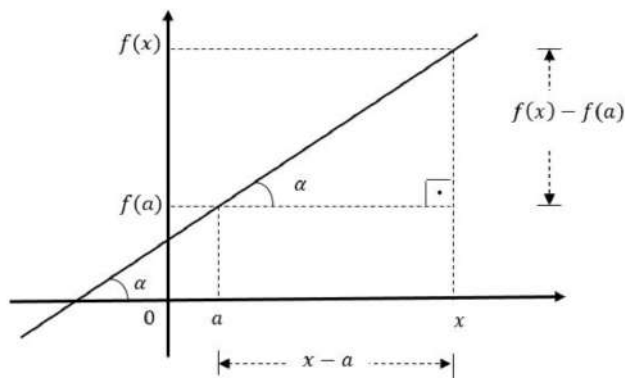
$$(i) f(x) = 2x + 4 \quad (ii) f(x) = x^2 \quad (iii) f(x) = x^3.$$

(Dê uma interpretação geométrica para q)

Procedendo de forma análoga, a inclinação da reta que passa por $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$ será descrita por:

$$q(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

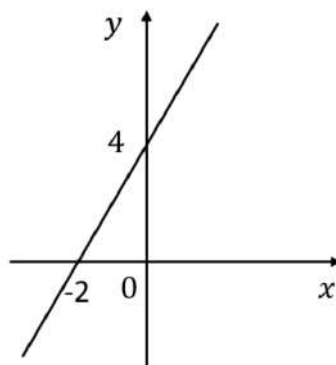
Geometricamente, tem-se:



Exemplo 2.13

$$f(x) = 2x + 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2x + 4 - (2a + 4)}{x - a} = \frac{2x - 2a}{x - a} = \frac{2(x - a)}{x - a} = 2.$$



(Coisa maravilhosa a tangente de α é exatamente o coeficiente angular da reta)

2.3 Um pouco de História e Nascimento do Cálculo

http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm
em 1. de agosto de 2022 às 12h e 25min)

”Para realizar um estudo completo sobre as origens, desenvolvimento e consequências do Cálculo, necessitaríamos de uma pesquisa muito extensa cujo resultado final seria, sem dúvida, um texto longo que estaria além do propósito deste trabalho como um todo. O nosso intuito é o de dar uma apresentação geral que contenha alguns fatos importantes que permeiam os acontecimentos históricos relacionados com a construção desta poderosa ferramenta da matemática: o Cálculo. Além disso, gostaríamos que ficasse claro que essa construção é o resultado de diversas contribuições de muitos personagens, como ocorre de modo geral, com o conhecimento humano.

Convidamos também o usuário a apreciar alguns fatos interessantes que estão presentes no site, assim como encorajá-lo na visita às páginas dos matemáticos que aqui aparecem para conhecer um pouco a história de cada um.

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles, mesmo que de forma imprecisa ou não rigorosa, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas êpor exemplo, Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler. Nesse tempo ainda não havia uma sistematização, no sentido de uma construção logicamente estruturada. A união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.

O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas ou Cálculo Diferencial e outra parte relacionada às integrais, ou Cálculo Integral.

O Cálculo Diferencial: alguns fatos históricos

O aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos intimamente ligados à questão das tangentes. Desde a época dos Gregos antigos, já se conhecia a reta tangente como sendo uma reta que intersecta ”corta” uma curva em um único ponto, generalizando a situação observada no caso da circunferência. Na realidade, essa ideia é muito imprecisa e precisamos de um tratamento bem mais rigoroso para a questão da tangente à uma curva.

Arquimedes e Apolônio utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas. Vários outros métodos para resolver o problema de encontrar a tangente a uma curva em um ponto foram desenvolvidos ao longo da história.

Na realidade, após os Gregos, o interesse por tangentes a curvas reapareceu no século *XVII*, como parte do desenvolvimento da geometria analítica. Como equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentou bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica. A introdução de símbolos algébricos como uma ferramenta para estudar a geometria das curvas também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de derivada. Com o tempo, o tratamento se tornou mais algébrico e menos geométrico, proporcionando um contínuo progresso no desenvolvimento dos conceitos de funções, derivadas, integrais e outros tantos tópicos relacionados ao Cálculo.

Pierre de Fermat foi o primeiro a considerar a idéia de famílias de curvas. Ele chamou, por exemplo, de "parábolas maiores", as curvas cujas equações eram do tipo, $y = kx^n$, onde k é constante e $n = 2, 3, 4$, etc.

Fermat elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e os pontos de mínimo de uma função. Ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo. Escreveu a Descartes explicando o seu método que é basicamente utilizado ainda hoje. Na realidade, devido a esse trabalho, que estava intimamente relacionado com as derivadas, Lagrange afirmou considerar Fermat o inventor do Cálculo.

A questão de encontrar a tangente a uma curva é, historicamente, de especial importância, pois, ao que parece, foi o que Newton pensou quando teve um insight sobre como utilizar tangentes para estudar o movimento dos planetas. O método para a determinação foi desenvolvido pelo antecessor de Newton, Isaac Barrow, e consistia no limite de uma corda com os pontos aproximando-se entre si.

Acredita-se que um dia, enquanto observava o movimento dos planetas, Newton tenha-se perguntado porque as órbitas dos planetas eram curvas, pois se fossem formadas por segmentos de retas seriam muito mais fáceis de serem estudadas. Por que não considerá-las como um conjunto de pequenas retas que, aproximadamente, representariam o movimento daquela curva? Este simples, porém genial insight significou para Newton o começo de uma longa e frutífera produção científica que englobou, entre outras coisas, as derivadas, as integrais e toda a base da mecânica clássica.

O estudo do movimento dos corpos havia começado de maneira sistemática com Galileo. Entretanto ele estudara o movimento geometricamente, utilizando as proposições de Euclides e as propriedades das cônicas de Apolônio para chegar a relações entre distância, velocidade e aceleração, que, hoje em dia, são aplicações básicas da derivada.

Vários matemáticos estavam, a essa altura, estudando problemas relacionados ao movimento. Torricelli e Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. Já se sabia que a taxa de variação pontual é derivada e o deslocamento era a velocidade e que a operação inversa da velocidade era o deslocamento. Isso mostra que já existia uma certa noção da operação inversa da derivada, sendo que a idéia de que a integral era inversa da derivada era familiar a Barrow.

Para Newton, o movimento era a base fundamental para o estudo das curvas e de outros tópicos relacionados ao Cálculo. Newton escreveu o seu tratado sobre fluxions em 1666. Ele pensou em uma partícula descrevendo uma curva com duas linhas que se movimentavam e que representavam o sistema de coordenadas. A velocidade horizontal e a velocidade vertical eram as fluxões de x e y associadas ao fluxo do tempo. Os fluents eram x e y . Em linguagem moderna, seria a derivada de x com relação ao tempo, ou simplesmente $x'(t)$ e seria analogamente a derivada de y com relação ao tempo ou ainda $y'(t)$. Tanto os nomes quanto as notações de Newton foram deixadas de lado ao longo dos anos, prevalecendo a notação criada por Leibniz. Vale a pena notar, entretanto, que é ainda bastante utilizada pelos físicos quando a derivada em questão é em relação ao tempo e é dada a função deslocamento $x = x(t)$; nesse caso, será a velocidade e será a aceleração.

Embora Newton tenha desenvolvido e revisto o seu Cálculo entre 1666 e 1671, nada foi publicado até 1736. Ele havia apenas mostrado os seus manuscritos para alguns colegas e amigos.

Leibniz, em 1672, enquanto vivia em Paris, encontrou-se com Huygens e com ele aprendeu muito e recebeu

muitos conselhos que constituíram um forte impulso para que viesse a desenvolver o seu Cálculo Diferencial e Integral. Nesse período, ele estabeleceu contato com muitos dos matemáticos respeitados da Royal Society e, dentre eles, destaca-se Barrow. Leibniz teve acesso aos seus trabalhos e estabeleceu um longo período de correspondências. Seu Cálculo Diferencial tinha uma fundamentação bem diferente daquele de Newton. Leibniz não estudou o movimento para chegar aos conceitos de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos. Introduziu dx e dy como a diferença entre esses valores sucessivos. Embora Leibniz não tenha usado como definição de derivada, ele sabia que representava o coeficiente angular da tangente.

Há um capítulo especial na história do Cálculo: uma longa e quase sempre inescrupulosa disputa entre Newton e Leibniz sobre quem havia "criado" o Cálculo. Ambos não pouparam acusações picantes para descrever o outro e os seus feitos e geraram uma discussão acalorada no meio científico da época sobre quem seria a mais importante autoridade em Cálculo. Essa situação chegou a tal ponto que os matemáticos que viviam no Reino Unido se distanciaram durante um período bastante longo dos matemáticos do continente. Enquanto o Cálculo "Leibniziano" ganhava cada vez mais adeptos na Europa entre esses a família Bernoulli e os matemáticos da "ilha", como dizem alguns historiadores, davam mais atenção às pompas e circunstâncias criadas para a cerimônia fúnebre de Newton na Abadia de Westminster. Durante ainda algum tempo, esses matemáticos ficaram um pouco "ilhados" e, quando voltaram a estabelecer relações com os europeus do continente, haviam não só perdido parte do avanço do Cálculo como também não compreendiam muito bem a notação "Leibniziana" então largamente utilizada.

Carl B. Boyer, em seu livro *A History of Mathematics*, afirma: Como consequência da infeliz disputa entre Newton e Leibniz, os matemáticos britânicos ficaram de certa forma alienados dos trabalhos do continente (...) e o desenvolvimento da Matemática não conseguiu acompanhar o rápido progresso dos outros países da Europa ao longo do século *XVIII*.

Apesar das diferenças, tanto Newton quanto Leibniz reconheceram até certo ponto a importância do "adversário". Leibniz disse: Considerando a Matemática desde o início do mundo até a época de Newton, o que ele fez é sem dúvida a melhor metade. Newton, por sua vez, na primeira edição do *Principia*, admitiu que Leibniz possuía um método semelhante ao seu. Infelizmente, na terceira edição, após o ápice das desavenças, Newton retirou a referência a Leibniz.

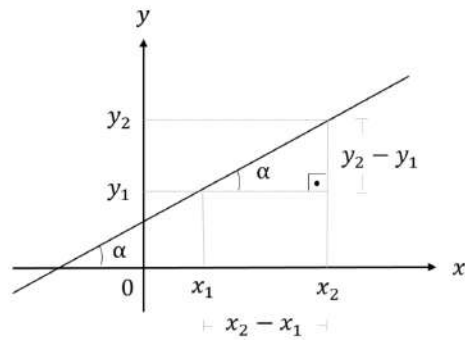
O desenvolvimento do Cálculo continuou com muitos outros matemáticos, como, por exemplo, Jacques Bernoulli, Johann Bernoulli, MacLaurin, Agnesi, Euler, d'Alembert, Lagrange e Cauchy."

2.4 Uma pausa para alguns Comentários sobre retas

Para determinar uma equação da reta em \mathbb{R}^2 , precisamos de: Um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular da reta m ou dois pontos; em seguida, obtemos o coeficiente angular m .

2.4.1 Equação da reta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e coeficiente angular m :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



Exemplo 2.14

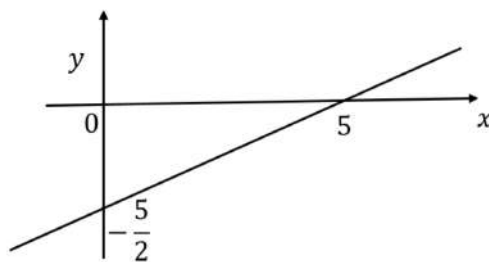
Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P_0(1, -2)$ com coeficiente angular $\frac{1}{2}$.

Solução

Com efeito, a equação da reta tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$ e passa por $P_0(1, -2)$, então, vem:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 1) \iff y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \iff y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

■



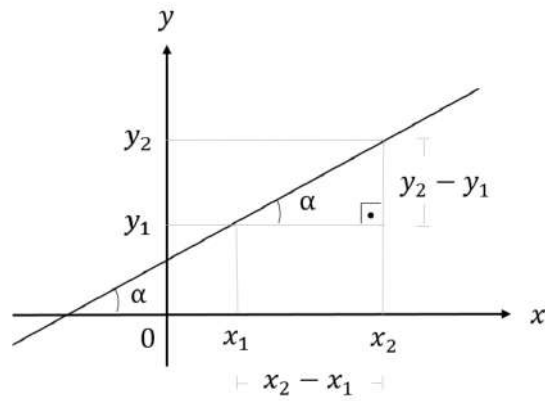
2.4.2 Equação da reta que passa pelos pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$:

Determinando o coeficiente angular da reta que passa por P e Q , temos:

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1.$$

Em seguida, podemos escolher um dos dois pontos, digamos $P(x_1, y_1)$, descrevendo uma equação da reta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Exemplo 2.15

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P(1, -2)$ e $Q(4, 6)$.

Solução

Com efeito, a equação da reta que passa por $P(1, -2)$ e $Q(4, 6)$, tem coeficiente angular

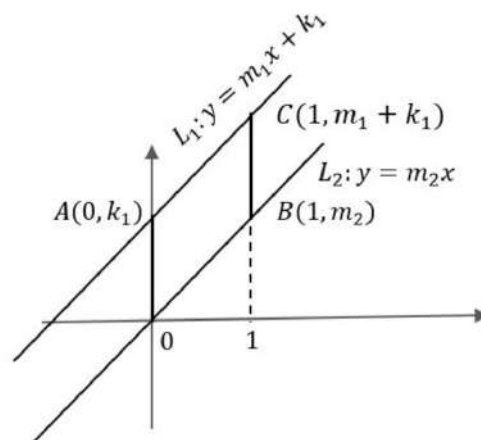
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (-2)}{4 - 1} = \frac{8}{3}$$

Daí, podemos escolher qualquer um dos dois pontos; por exemplo, tomando $P(1, -2)$, vem:

$$y - (-2) = \frac{8}{3}(x - 1) \iff y + 2 = \frac{8}{3}(x - 1)$$

■

2.4.3 Retas paralelas $L_1: y = m_1x + k_1$ e $L_2: y = m_2x$ denotaremos por $L_1 // L_2$:



Devemos ressaltar que não é uma demonstração; e sim, uma justificativa plausível:

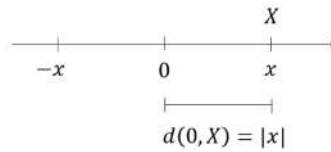
$L_1 // L_2 : med(\overline{OA}) = med(\overline{BC})$ e $med(\overline{AC}) = med(\overline{OB})$. Assim, tem-se :

$$K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \iff m_1 = m_2.$$

■

Um esboço de uma demonstração formal, será delineada a seguir, ressaltando que módulo de

x , denotado por $|x| = d(0, X) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ é a distância da origem O ao ponto X na reta.



Como a 5ª Sinfonia de Ludwig Van Beethoven; dita sinfonia do destino, voltaremos ao tema módulo posteriormente.

Prova:

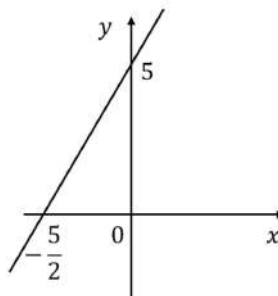
Com efeito, $L_1 // L_2 : d(O, A) = d(B, C)$ e $d(A, C) = d(O, B)$. Por conseguinte, vem:

$$\begin{aligned} d^2(O, A) &= d^2(B, C) \iff 0^2 + K_1^2 = (1-1)^2 + (m_1 + K_1 - m_2)^2 \\ \iff K_1^2 &= (m_1 + K_1 - m_2)^2 \iff |K_1| = |m_1 + K_1 - m_2| \\ \iff \pm K_1 &= m_1 + K_1 - m_2 \iff \begin{cases} K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \\ \text{ou} \\ -K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} m_1 = m_2 \\ \text{ou} \\ -2K_1 = m_1 - m_2 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} m_1 = m_2 \\ \text{ou} \\ 0 = -2K_1 = m_1 - m_2 \end{cases} \\ \iff m_1 &= m_2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.16

Determine uma equação da reta L que passa pelo ponto $P(1, -2)$ e é paralela a reta S dada por $y = 2x + 5$.



Solução

Com efeito, as retas

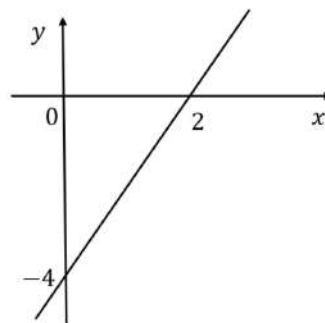
$$L//S \iff m_L = m_S.$$

Além disso, o coeficiente angular da reta S é $m_S = 2$ e a reta L é descrita por:

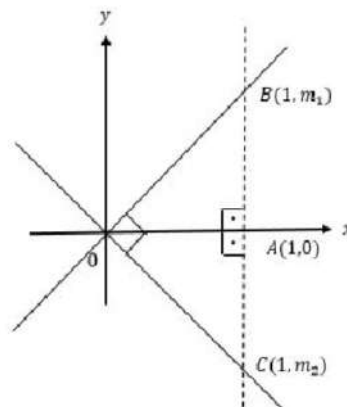
$$y - (-2) = m_L(x - 1) \iff y + 2 = m_L(x - 1)$$

Como $m_L = m_S = 2$ segue-se que:

$$y + 2 = 2(x - 1) \iff y = 2x - 4.$$



2.4.4 Retas Perpendiculares $L_1 : y = m_1x$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1 \perp L_2$:



Não perde a generalidade a demonstração, visto que: usando retas paralelas faríamos o caso geral.

Demonstração

Sejam $L_1 : y = m_1x$ e $L_2 : y = m_2x$ retas perpendiculares $L_1 \perp L_2$ à luz do Teorema de Pitágoras,

temos:

$$\begin{aligned} [d(B, C)]^2 &= [d(O, B)]^2 + [d(O, C)]^2 \iff (1-1)^2 + (m_1 - m_2)^2 = 1^2 + m_1^2 + 1^2 + m_2^2 \\ &\iff m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2 \iff -2m_1m_2 = 2 \iff m_1m_2 = -1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1m_2 = -1.$$

Exemplo 2.17

Determine uma equação da reta L que passa pelo ponto $P(-1, 2)$ e é perpendicular a reta S dada por $x - 3y - 1 = 0$.

Solução

Um esboço do gráfico da reta S é descrito por:

$$S : x - 3y - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

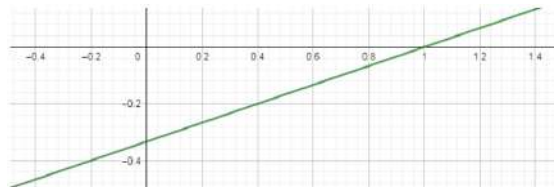
Para

$$x = 0 \implies y = -\frac{1}{3}.$$

(valor que conta o eixo y)

Para

$$y = 0 \implies \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \implies x = 1.$$



De fato, as retas são perpendiculares equivale a dizer:

$$L \perp S \iff m_L \cdot m_S = -1.$$

Além disso, a reta S pode ser reescrita como

$$S : y = \frac{1}{3}x - 1,$$

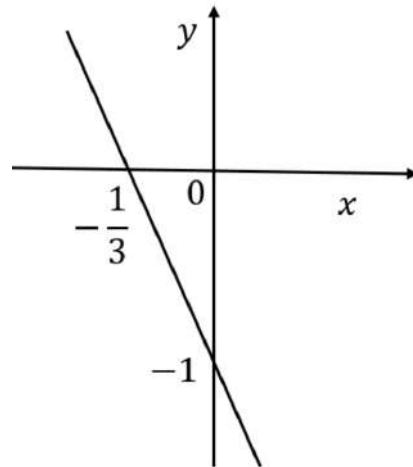
o coeficiente angular da reta S é $m_S = \frac{1}{3}$ assim,

$$m_L = -\frac{1}{m_S} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

De sorte que:

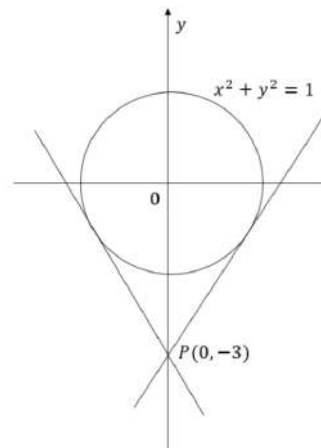
$$\begin{aligned} y - 2 &= -3(x + 1) = -3x - 3 \\ y &= -3x - 3 + 2 \iff y = -3x - 1. \end{aligned}$$

Agora, fazendo um esboço do gráfico da reta L , a seguir:



Problema 2.4

Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P(0, -3)$ e são tangentes a circunferência $\xi : x^2 + y^2 = 1$.



Solução

Com efeito, a equação da reta que passa por $P(0, -3)$ é dada por:

$$y = mx - 3.$$

Agora, para que as retas sejam tangente a circunferência, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx - 3 \end{cases} \implies x^2 + (mx - 3)^2 = 1 \implies (1 + m^2)x^2 - 6mx + 8 = 0.$$

Daí, vem:

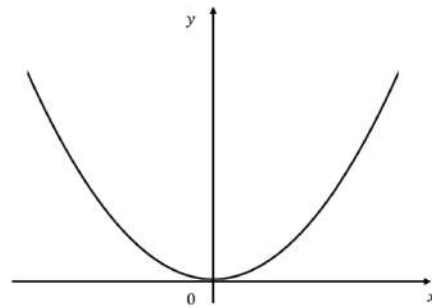
$$\begin{aligned}\Delta &= (-6m)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot 8 = 0 \implies 36m^2 - 32 - 32m^2 = 0 \\ \implies 4m^2 - 32 &= 0 \implies m^2 = \frac{32}{4} = 8 \implies \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ m = -2\sqrt{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Assim, temos dois casos a considerar:

1º Caso: $m = 2\sqrt{2} \implies y = 2\sqrt{2}x - 3.$

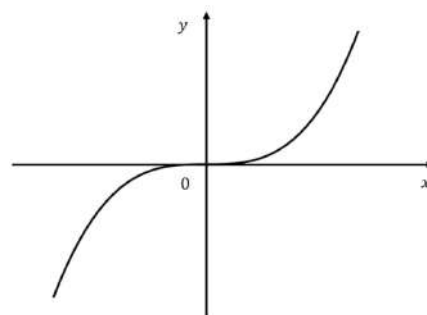
2º Caso: $m = -2\sqrt{2} \implies y = -2\sqrt{2}x - 3.$

(ii) $f(x) = x^2$



$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a) \cdot (x + a)}{x - a} = x + a.$$

(iii) $f(x) = x^3$



$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a) \cdot (x^2 + xa + a^2)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

2.5 Equação do 2º Grau

Chama-se equação do 2º grau a uma variável x , a toda expressão da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Exemplo 2.18

$$\begin{aligned} 1. \quad x^2 - 6x = 0 &\implies x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 \implies x^2 - 6x + 9 = 9 \implies (x - 3)^2 = 9 \implies \\ &\implies x - 3 = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \implies \begin{cases} x - 3 = 3 \\ \text{ou} \\ x - 3 = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 6 \\ \text{ou} \\ x = 0. \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x^2 + x - 1 = 0 &\implies x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 1 \implies \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \implies \\ &\implies x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \implies \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 2x^2 + 7x + 6 = 0 &\implies 2\left[x^2 + \frac{7}{2}x\right] = -6 \implies x^2 + \frac{7}{2}x = -3 \implies x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 3 \implies \\ &\implies \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \implies x + \frac{7}{4} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4} \implies \begin{cases} x = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-7-1}{4} = -2. \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.5.1 Dedução da Fórmula

Teorema 2.1

Seja

$$y = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Então, suas raízes são dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Demonstração

Com efeito, usando o procedimento de completamento de quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\implies a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0 \implies a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0 \\ &\implies \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] = 0 \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \implies x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De sorte que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

■

2.5.2 Soma e Produto das raízes do trinômio do 2º grau:

Corolário 2.1

Seja

$$y = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

e sejam x_1 e x_2 suas raízes. Então, temos:

$$(i) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (ii) \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

♥

Demonstração

Basta notar que:

$$(i) \quad x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

e procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} (ii) \quad x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= -\frac{(\Delta - b^2)}{4a^2} = -\frac{(b^2 - 4ac - b^2)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

■

2.5.3 Forma Fatorada:

Corolário 2.2

Considere

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0,$$

sejam x_1 e x_2 suas raízes, tais que: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Então, tem-se:

$$y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

♥

Demonstração

Com efeito,

$$-(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ e } y = ax^2 + bx + c.$$

Então,

$$\begin{aligned} y &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] \\ &= a [x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] = a [x(x - x_2) - x_1(x - x_2)] \\ &= a(x - x_2) \cdot (x - x_1) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

■

2.5.4 A Dedução da equação do 2º grau por Viète e Um pouco de História

2

(i) Vamos descrever o método de Viète para a resolução de equação do 2º grau. Seja

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \quad (1)$$

Fazendo $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e levando na equação (1), vem:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0. \quad (2)$$

Viète transformou essa equação (2) numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente de v , isto é, escolhendo $u = \frac{-b}{2a}$. Obteve assim a equação:

$$av^2 + a \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{-b}{2a} \right) + c = 0, \quad (3)$$

e fazendo algumas manipulações simples em (3), obtemos:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (4)$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então, decorre de (4) que:

$$v = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (5)$$

e, portanto,

$$x = u + v = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Que é a "fórmula de Báskara" o que parece ser exclusiva do Brasil, para maiores detalhes veja referência [3].

■

²François Viète foi um matemático francês que nasceu em Fontenay no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou e exerceu Direito e tornou-se membro do Parlamento da Bretanha. Não era, portanto, um matemático por profissão; porém o seu lazer era dedicado à Matemática, dentro da qual desempenhou um papel central na transição da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, mas sem dúvida foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viète chegou mais próximo das ideias modernas.

Problema 2.5

Determine A , B e C , de modo que:

$$1. \frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad 2. \frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad 3. \frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

1.

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad (1)$$

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2) \cdot (x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2) \cdot (x-3)} \\ \implies 2x+1 &= (A+B)x + (-3A-2B) \implies \begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \quad 3E_1 + E_2 \rightarrow E_2 \implies \begin{cases} A+B=2 \\ B=7 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-5 \\ B=7. \end{cases}$$

Daí, reescrevemos a decomposição (1), tem-se:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3}.$$

■

2.

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad (2)$$

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)} \\ \implies 0x^2 + 0x + 1 &= (A+C)x^2 + (-A+B)x - B \implies \\ \implies \begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{cases} &\implies \begin{cases} C=1 \\ A=-1 \\ B=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Daí, reescrevemos a decomposição (2), obtem-se:

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \quad (2)$$

■

3.

$$\frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad (3)$$

Solução

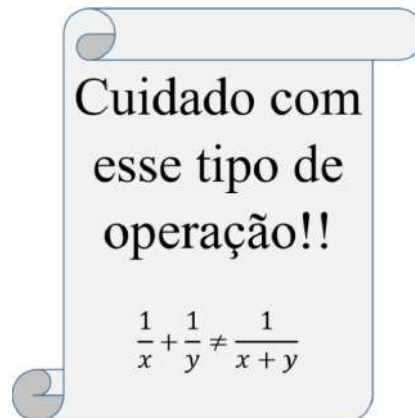
De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)} \\
&= \frac{(A + B)x^2 + Cx + A}{x(x^2 + 1)} = \\
\Rightarrow x^2 + x + 2 &= (A + B)x^2 + Cx + A \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ C = 1 \\ A = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ C = 1 \\ A = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, decorre da decomposição em (3) o resultado:

$$\frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2}{x} + \frac{-1x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

■

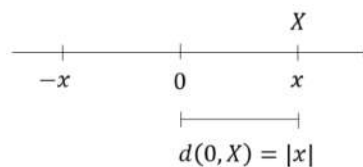


2.6 Módulo ou Valor Absoluto

Seja x um número real. O módulo de x , denotado por $|x| = d(0, X)$ é dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

é a distância da origem O ao ponto X na reta



Exemplo 2.19

$$(i) |5| = 5 \quad (ii) |3 - \pi| = \pi - 3; \text{ Sabemos que: } \pi \simeq 3,14159\dots$$

$$(iii) |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & x - 1 < 0 \end{cases} \iff |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}.$$

2.6.1 Consequências

$$1. (i) |x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (ii) \sqrt{x^2} = |x|$$

Demonstração

1º Caso:

$$x \geq 0 \implies |x|^2 = |x| \cdot |x| = x \cdot x = x^2.$$

2º Caso:

$$x < 0 \implies |x|^2 = |x| \cdot |x| = (-x) \cdot (-x) = x^2,$$

dos casos (1) e (2), segue-se:

$$|x|^2 = x^2.$$

Decorre daí (ii)

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$2. (i) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (ii) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0. \quad (iii) \left| \prod_{j=1}^n x_j \right| = \prod_{j=1}^n |x_j|.$$

$$(i) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned} |x \cdot y|^2 &= (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 \\ \implies \sqrt{|x \cdot y|^2} &= \sqrt{|x|^2 \cdot |y|^2} \\ &= \sqrt{|x|^2} \cdot \sqrt{|y|^2} = |x| \cdot |y|. \end{aligned}$$

$$(ii) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

Demonstração

Basta proceder de forma análoga ao caso anterior, vejamos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{y} \right|^2 &= \left(\frac{x}{y} \right)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{|x|^2}{|y|^2} \\ \Rightarrow \sqrt{\left| \frac{x}{y} \right|^2} &= \sqrt{\frac{|x|^2}{|y|^2}} = \frac{|x|}{|y|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

(iii) Usando o método de indução finita (veja a referência [1])

(a) Para $n = 2$, temos:

$$\left| \prod_{j=1}^{n=2} x_j \right| = |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| = \prod_{j=1}^{n=2} |x_j|.$$

Logo,

$$|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$$

(b) Suponha válido para n (hipótese de indução finita), isto é,

$$\left| \prod_{j=1}^n x_j \right| = |x_1 \cdot x_2 \dots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \dots |x_n| = \prod_{j=1}^n |x_j|.$$

Então, tem-se:

$$\left| \prod_{j=1}^{n+1} x_j \right| = \left| \prod_{j=1}^n x_j \cdot x_{n+1} \right| = \left| \prod_{j=1}^n x_j \right| \cdot |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^n |x_j| \cdot |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|,$$

e, portanto,

$$\left| \prod_{j=1}^{n+1} x_j \right| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|.$$

$$3. (i) |x| = a, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases} \quad (ii) |x| \leq a, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff -a \leq x \leq a.$$

$$(iii) |x| \geq a, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases} \quad (iv) \forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|.$$

Demonstração

$$(i) \quad |x| = a, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{aligned} |x| = a &\iff |x|^2 = x^2 = a^2 \iff x^2 - a^2 = 0 \\ &\iff (x - a) \cdot (x + a) = 0 \iff x = -a \text{ ou } x = a. \end{aligned}$$

Exemplo 2.20

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x - 1| = \pi$$

Solução

Basta notar que:

$$|x - 1| = \pi \iff \begin{cases} x - 1 = \pi \\ \text{ou} \\ x - 1 = -\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi + 1 \\ \text{ou} \\ x = -\pi + 1. \end{cases}$$

$$(ii) \quad |x| \leq a, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff -a \leq x \leq a.$$

Demonstração

Por definição, temos: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

1º Caso: $x \geq 0$:

$$|x| = x \leq a \tag{1}$$

2º Caso: $x < 0$:

$$|x| = -x \leq a \iff x \geq -a \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$\begin{cases} x \leq a \\ \text{e} \\ x \geq -a \end{cases} \iff -a \leq x \leq a.$$

Exemplo 2.21

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x - 1| \leq 7$$

Solução

Com efeito,

$$|x - 1| \leq 7 \iff -7 \leq x - 1 \leq 7 \iff -6 \leq x \leq 8.$$

$$(iii) |x| \geq a, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$$

Demonstração

Procedendo de forma análoga ao item anterior, tem-se:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1º Caso: $x \geq 0$:

$$|x| = x \geq a \tag{1}$$

2º Caso: $x < 0$:

$$|x| = -x \geq a \iff x \leq -a, \tag{2}$$

Assim, dos casos (1) e (2) segue-se:

$$\begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a. \end{cases}$$

■

Outro modo de provar a mesma afirmação:

Uma forma elegante e simples de demonstrar, é descrita por:

$$\begin{aligned} |x| \geq a &\iff |x|^2 = x^2 \geq a^2 \iff x^2 - a^2 \geq 0 \\ &\iff (x - a) \cdot (x + a) \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases} \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.22

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x + 2| \geq 10$$

Solução

Basta proceder de forma inteiramente análoga, para se obter:

$$|x + 2| \geq 10 \iff \begin{cases} x + 2 \geq 10 \\ \text{ou} \\ x + 2 \leq -10 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 8 \\ \text{ou} \\ x \leq -12. \end{cases}$$

■

$$(iv) \forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|.$$

Demonstração

À luz da definição, temos:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1º Caso: $x \geq 0$:

$$|x| \geq x \tag{1}$$

2º Caso: $x < 0$:

$$|x| \geq -x \iff -|x| \leq x \quad (2)$$

Portanto, decorre de (1) e (2) que:

$$\begin{cases} |x| \geq x \\ \text{e} \\ -|x| \leq x. \end{cases} \iff -|x| \leq x \leq |x|.$$

■

4. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} (i) \quad & |x + y| \leq |x| + |y| & (ii) \quad & |x| - |y| \leq |x - y| \\ (iii) \quad & ||x| - |y|| \leq |x - y| & (iv) \quad & \left| \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|. \end{aligned}$$

Demostração

(i)

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2 \\ |x + y|^2 &\leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \\ \iff |x + y|^2 &\leq (|x| + |y|)^2 \iff \sqrt{|x + y|^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

■

(Conhecido como desigualdade triangular, ou seja, em qualquer triângulo qualquer lado é sempre menor ou igual a soma dos outros dois).

(ii) Basta observar que: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ e, portanto,

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

(iii) Basta observar que:

$$\begin{aligned} \begin{cases} |x| - |y| \leq |x - y| \\ \text{e} \\ |y| - |x| \leq |x - y| \end{cases} &\iff \begin{cases} |x| - |y| \leq |x - y| \\ \text{e} \\ -(|x| - |y|) \leq |x - y| \end{cases} \iff \begin{cases} |x| - |y| \leq |x - y| \\ \text{e} \\ |x| - |y| \geq -|x - y| \end{cases} \\ &\iff -|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \iff ||x| - |y|| \leq |x - y| \end{aligned}$$

e, portanto,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

■

$$(iv) \quad \left| \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

Demostração

(Indução Finita sobre n)

Para $n = 2$, temos:

$$\left| \sum_{j=1}^2 x_j \right| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = \sum_{j=1}^2 |x_j|.$$

Portanto

$$\left| \sum_{j=1}^2 x_j \right| \leq \sum_{j=1}^2 |x_j|.$$

Suponha válido para n , então falta mostrar para $n + 1$.

Veamos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n+1} x_j \right| &= |x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\leq |x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}| = \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|.$$

(Conhecido como *desigualdade triangular generalizada*)

Exercício 2.5

(A) Prove que:

$$|f(x) - f(2)| \leq 20 \cdot |x - 2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3;$$

Demonstração

Observe que:

$$|f(x) - f(2)| = |x^3 + x - 10| = |(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 5)|.$$

Agora, $0 \leq x \leq 3 \implies |x| \leq 3$, por conseguinte, obtemos:

$$|(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 5)| \leq |x - 2| \cdot [x^2 + 2|x| + 5] \leq 20|x - 2|,$$

Visto que: $[x^2 + 2|x| + 5] \leq 3^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 20$.

Logo,

$$|f(x) - f(2)| \leq 20 \cdot |x - 2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3.$$

(B) Sejam y, y_0, ξ no corpo ordenado completo \mathbb{R} ,

tais que: $\xi > 0$ e $y_0 \neq 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \min \left\{ \frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi |y_0|^2}{2} \right\}$$

$y \neq 0$, prove que:

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \xi.$$

Vejam *alguma majoração* antes de fazer a demonstração:

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| |y_0|} \text{ e } |y_0| - |y| \leq |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \implies$$

$$|y| - |y_0| > -\frac{|y_0|}{2} \implies |y| > \frac{|y_0|}{2} \implies \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| &= \frac{|y_0 - y|}{|y| |y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2} |y_0 - y| < \frac{2}{|y_0|^2} \frac{\xi |y_0|^2}{2} = \xi \\ &\implies \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \xi. \end{aligned}$$

Demonstração

Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \min \left\{ \frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi |y_0|^2}{2} \right\} > 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \implies \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}. \quad (1)$$

$$|y - y_0| < \frac{\xi |y_0|^2}{2} \implies \frac{2 |y - y_0|}{|y_0|^2} < \xi. \quad (2)$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\frac{1}{|y|} \frac{2 |y - y_0|}{|y_0|^2} < \frac{2}{|y_0|} \xi.$$

De sorte que:

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \xi.$$

■

(C) Seja f uma função dada por:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Prove que:

(i) $|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot |x - 1|$ para $x > 0$;

(ii) $|f(x) - 2| \leq 3|x - 1|$ para $x > \frac{1}{2}$;

(iii) $f(x) \geq 2$, para todo $x > 0$.

Demonstração

(i) Com efeito,

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| x + \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \implies \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \\ &= \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| = \left| \frac{x-1}{x} \right| \cdot |x-1| \leq \left(\frac{|x| + |1|}{|x|} \right) \cdot |x-1| \end{aligned}$$

Como $x > 0$, segue-se que:

$$|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot |x - 1|.$$

(ii) Para $x > \frac{1}{2}$, então, $\frac{1}{x} < 2$ e, portanto, $1 + \frac{1}{x} < 3$.

Daí, e do item anterior, obtemos:

$$|f(x) - 2| \leq 3|x - 1|.$$

(iii) Basta revisitar a desigualdade entre as médias: geométrica e aritmética, obtendo:

$$\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \quad x > 0.$$

Logo,

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

■

(D) Sejam x_1, x_2, \dots, x_n números reais positivos, tais que: $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. Verifique se:

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \geq 2^n.$$

Demonstração

Basta notar que:

$$\begin{cases} \sqrt{1 \cdot x_1} \leq \frac{1+x_1}{2} \\ \sqrt{1 \cdot x_2} \leq \frac{1+x_2}{2} \\ \vdots \\ \sqrt{1 \cdot x_n} \leq \frac{1+x_n}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} 2\sqrt{x_1} \leq 1 + x_1 \\ 2\sqrt{x_2} \leq 1 + x_2 \\ \vdots \\ 2\sqrt{x_n} \leq 1 + x_n \end{cases}.$$

Donde, obtemos:

$$\left\{ \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}^{n \text{ vezes}} \leq (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \right\},$$

visto que $\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = 1$.

Portanto,

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \geq 2^n.$$

■

(Será que seria possível provar usando indução finita sobre n ? Porquê?)

(E) (Vestibular: COVEST 1999: Função e majorações)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \frac{x2^{-x}}{(2^{-x} + 1)^2},$$

então, verifique se: $0 < f(100) < 10^{-28}$.

Solução

Com efeito,

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2^x}}{\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)^2} = \frac{x2^x}{(1 + 2^x)^2},$$

então,

$$f(100) = \frac{100 \cdot 2^{100}}{(1 + 2^{100})^2} < \frac{100 \cdot 2^{100}}{2^{200}} = \frac{100}{2^{100}}.$$

Afirmção: $2^{100} > 10^{30}$.

De fato,

$$\begin{aligned} 2^{100} > 10^{30} &\iff 100 \cdot \log_{10} 2 > 30 \cdot \log_{10} 10 \\ &\iff 100 \cdot 0,301 > 30 \iff 30,1 > 30. \end{aligned}$$

Por conseguinte, vem:

$$2^{100} > 10^{30} \iff \frac{1}{2^{100}} < \frac{1}{10^{30}}.$$

Assim,

$$0 < f(100) < \frac{100}{2^{100}} < \frac{10^2}{10^{30}} = 10^{-28}.$$

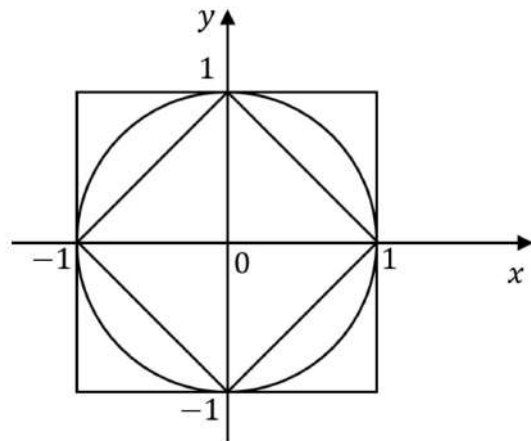
De sorte que:

$$0 < f(100) < 10^{-28}.$$

■

(F) Esboce os gráfico de $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathbb{B} = \{u \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\}$ e $\mathbb{C} = \{u \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} = 1\}$,

Solução



(Posteriormente, em Geometria Analítica Vetorial serão definidas como normas euclidianas, norma da soma e norma do máximo)

■

(G) Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.

(i) Se um número racional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $m.d.c.(p, q) = 1$

(p e q primos entre si) é tal que: $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, prove que:
 p/a_0 e q/a_n (p divide a_0 e q divide a_n).

(ii) $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ é racional ou irracional? justifique.

(i)

Demonstração

Com efeito, $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, então temos:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

ou ainda,

$$a_n p^n = -a_{n-1} q p^{n-1} - \dots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n \quad (6.3)$$

ou

$$a_0 q^n = -a_n p^n - \dots - a_1 p q^{n-1}. \quad (6.4)$$

Agora, observe que:

q divide o 2º membro de (6.3). Logo, q divide a_n ou q divide p . Como

$m.d.c.(p, q) = 1$, segue-se que: q/a_n . Analogamente, mostra-se que:

p/a_0 .

(p divide a_0 : $p/a_0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a_0 = kp$).

■

(ii)

Solução

Se $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$, então, temos:

$$x^3 = 2 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^2 \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}} + 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})^2}.$$

$$x^3 = 4 + 3\sqrt[3]{-1(2 - \sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{-1(2 + \sqrt{5})}$$

$$x^3 = -3\left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right) + 4.$$

Donde, vem:

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Daí, as possíveis raízes racionais, se existirem, são: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

À luz do algoritmo de Briott-Ruffini, temos: $x = 1$ é raiz. Assim,

a equação toma a forma:

$$(x - 1) \cdot (x^2 + x + 4) = 0.$$

Portanto, $x = 1$ é o único racional admissível.

Ou ainda,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = 1.$$

■

(I) Os números reais p, q e α são, tais que: $p > 0, q > 0$ e $\alpha > 1$. Prove que:

$$\frac{p + \alpha^2 q}{p + q} > \alpha \implies \frac{p}{q} < \alpha.$$

Demonstração

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \frac{p + \alpha^2 q}{p + q} > \alpha &\implies p + \alpha^2 q > p\alpha + q\alpha \\ &\implies p(1 - \alpha) > q\alpha(1 - \alpha) \implies \frac{p}{q} < \alpha. \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Uma expressão popular de autoria do filósofo chinês Confúcio
(Chiu Kung) 552 a.C.ê489 a.C.
“Uma figura vale mais que mil palavras”

O cenário da educação básica está demorando para reconhecer as mudanças que a explosão de dados causou à sociedade. Não estamos preparando nossos alunos da melhor maneira para navegar com sucesso no século XXI.
(Wilkerson & Laina, 2017)



Para o matemático britânico Keith Devlin, professor da Universidade Stanford, a matemática é a “ciência dos padrões” e “torna o invisível visível”, 2020.

Neste Capítulo daremos ênfase a função, alguns tipos de funções, tais como: funções polinomiais do primeiro grau e casos particulares e segundo grau, função cúbica, recíproca, raiz quadrada, raiz cúbica, composições de funções, funções exponencial e logarítmica, funções inversas. Ressaltando que faremos esboços de gráficos por translações e reflexões de eixos.

3.1 Função

Definição 3.1

Uma função $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ é uma correspondência em que, a cada $x \in \mathbb{A}$, está associado um único $y \in \mathbb{B}$, tal que: $y = f(x)$.



Observação

Na definição de função, podemos destacar:

(a) \mathbb{A} é chamado de domínio de f , denotamos por:

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{D}_f = \mathbb{A}.$$

(b) \mathbb{B} é o contra-domínio de f , descrito por:

$$CD(f) = CD_f = \mathbb{B}.$$

(c) A função é f (é a lei que diz o que fazer) e não $f(x)$ que é o resultado da lei. A imagem de f será representada por $\text{Im}(f)$ e dada a seguir:

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{B} : y = f(x), x \in \mathbb{A}\}.$$

Exemplo 3.1

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pede-se:

$$(i) f(0) \quad (ii) f(\pi) \quad (iii) f(\sqrt{2}) \quad (iv) f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Solução

Notações:

$\mathbb{Q} = \{x = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ Conjunto dos números irracionais, ou seja, conjunto de todos os números reais que não são racionais.

Basta observar: A leitura da função f :

Se o número do domínio for racional, a imagem de f é zero.

Se o número do domínio for irracional, a imagem de f é um.

Agora, fazendo alguns cálculos auxiliares, obtemos:

$$(i) x = 0 \in \mathbb{Q}: f(0) = 0 \quad (ii) x = \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: f(\pi) = 1$$

$$(iii) x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: f(\sqrt{2}) = 1 \quad (iv) x = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}: f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Logo,

$$(i) f(0) = 0 \quad (ii) f(\pi) = 1 \quad (iii) f(\sqrt{2}) = 1 \quad (iv) f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Exemplo 3.2

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = x^2$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{xh}, \text{ com } xh \neq 0.$$

■

Solução

É fundamental entender o que faz a lei f : Leva

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \square &\longmapsto f(\square) = (\square)^2 \end{aligned}$$

\square é o elemento do domínio e $(\square)^2$ é o resultado da lei (imagem de f).

Feito este esclarecimento, vejamos:

$$f(x-h) = (x-h)^2 \text{ e } f(x+h) = (x+h)^2.$$

Daí, vem:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= (x+h)^2 - (x-h)^2 \\ &= [(x+h) - (x-h)] \cdot [(x+h) + (x-h)] \\ &= 2h \cdot 2x = 4xh. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{xh} = \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{xh} = 4.$$

Exemplo 3.3

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = ax + b$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

Consideremos dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$

1º Caso: $a = 0$: $f(\square) = b$. (note que qualquer valor do "quadrado" o resultado será sempre b).

Ilustrativamente, $f(\square) = f(x+k+n) = b$ e $f(\square) = f(x+h) = b$. Assim,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b - b}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

2º Caso: $a \neq 0$: $f(\square) = a\square + b$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[a(x+h) + b] - (ax + b)}{h} = \frac{ax + ah - ax}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Exemplo 3.4

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = x^2 + x$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

$f(x) = x^2 + x$, $f(\square) = (\square)^2 + (\square)$. Observe que: o "quadrado" é apenas um símbolo representando o significado.

$$f(k) = k^2 + k, f(\Delta) = (\Delta)^2 + (\Delta), f(x+h) = (x+h)^2 + (x+h).$$

Além disso, fazendo alguns cálculos auxiliares, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + h - x^2 \\ &= 2xh + h^2 + h \\ &= h(2x + h + 1). \end{aligned}$$

Por conseguinte, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} = \frac{h(2x + h + 1)}{h} \\ &= 2x + h + 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$, usando a mesma ideia do "quadrado" $f(\square) = \frac{1}{\square}$.

$f(k) = \frac{1}{k}$, $f(\Delta) = \frac{1}{\Delta}$, $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$. Daí vem:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h)x}.$$

Exemplo 3.6

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = x^3 + 1$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

$f(x) = x^3 + 1$, usando a mesma ideia do "quadrado" $f(\square) = (\square)^3 + 1$.

Para ilustração, vamos simular alguns valores para o "quadrado"

$f(x+t+1) = (x+t+1)^3 + 1$, $f(\Delta) = (\Delta)^3 + 1$ e $f(x+h) = (x+h)^3 + 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^3 + 1] - [x^3 + 1]}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{[(x+h) - x] [(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h} \\ &= \frac{h [(x+h)^2 + (x+h)x + x^2]}{h} \\ &= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2 \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2. \end{aligned}$$

Exemplo 3.7

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = -2x$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

$f(x) = -2x$ usando a mesma figurinha do "quadrado" $f(\square) = -2(\square)$.

$f(\triangle) = -2\triangle$, $f(x+t+k) = -2(x+t+k)$ e $f(x+h) = -2(x+h)$.

Atenção especial no cálculo $-f(x) = -[-2x] = 2x$

$f(x+h) - f(x) = -2(x+h) - [-2x] = -2x - 2h + 2x = -2h$.

De sorte que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2(x+h) - [-2x]}{h} = \frac{-2h}{h} = -2.$$

Exemplo 3.8

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = x^2 + 1$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

$f(x) = x^2 + 1$, a ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si $f(\square) = (\square)^2 + 1$. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+t+1) = (x+t+1)^2 + 1 \text{ e } f(x+h) = (x+h)^2 + 1.$$

Voltando ao problema inicial, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{[(x+h) - x][(x+h) + x]}{h} = \frac{h[2x+h]}{h} \\ &= 2x + h. \end{aligned}$$

Exemplo 3.9

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

$f(x) = \sqrt{x}$, $f(\square) = \sqrt{\square}$.

A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p) = \sqrt{x+p}, f(\triangle) = \sqrt{\triangle} \text{ e } f(x+h) = \sqrt{x+h}.$$

Voltando ao problema dado, tem-se:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Vejamos um argumento de mudanças de variáveis, façamos:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x+h} \\ e \\ k = \sqrt{x} \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 = x+h \\ e \\ k^2 = x \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 - k^2 = h \\ e \\ k^2 = x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{t-k}{t^2-k^2} = \frac{t-k}{(t-k)(t+k)} \\ &= \frac{1}{t+k} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} (A-B) \cdot (A+B) &= A^2 - B^2 \\ &= (\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2 \\ &= x+h - x = h \end{aligned}$$

Óbvio, sendo $x > 0$ e $h > 0$ (porquê não consideramos $x \geq 0$ e $h \geq 0$?).

Agora, procedendo usando a racionalização, obtemos:

$$(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) = (\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2 = x+h - x = h$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.10

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução

$$f(x) = \sqrt[3]{x}. f(\square) = \sqrt[3]{\square}.$$

A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra que usamos. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p) = \sqrt[3]{x+p}, f(\triangle) = \sqrt[3]{\triangle} \text{ e } f(x+h) = \sqrt[3]{x+h}.$$

Voltando ao delineado, temos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}.$$

Poderia usar racionalização. Vejamos usando mudanças de variáveis, tem-se:

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{x+h} \\ e \\ k = \sqrt[3]{x} \end{cases} \implies \begin{cases} t^3 = x+h \\ e \\ k^3 = x \end{cases} \implies \begin{cases} t^3 - k^3 = h \\ e \\ k^3 = x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \frac{t-k}{t^3-k^3} = \frac{t-k}{(t-k)(t^2+tk+k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2+tk+k^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Observe que:

Determinando o **fator racionalizante**, tem-se:

$$\begin{aligned} (A-B) \cdot (A^2+AB+B^2) &= A^3-B^3 \\ (\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}) \cdot \left[(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 \right] &= (\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3 \\ &= x+h-x=h. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}) \cdot \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} \right)}{h \cdot \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Exercício 3.1

Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $x \neq a$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

onde:

$$\begin{array}{llll} 1) f(x) = kx + b & 2) f(x) = x^2 + x & 3) f(x) = \frac{1}{x} & 4) f(x) = x^3 + 1 \\ 5) f(x) = -2x & 6) f(x) = x^2 + 1 & 7) f(x) = \sqrt{x} & 8) f(x) = \sqrt[3]{x}. \end{array}$$

Solução

1. Consideremos dois casos: $k = 0$ e $a \neq 0$

1º Caso: $a = 0$: $f(\square) = b$. (note que qualquer valor do "quadrado"

o resultado será sempre b).

Ilustrativamente, $f(\square) = f(x+n+1) = b$ e $f(\triangle) = b$. Desta forma,

obtemos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{b - b}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0.$$

2º Caso: $k \neq 0$: $f(x) = kx + b$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{kx + b - (ka + b)}{x - a} = \frac{k(x - a)}{x - a} = k.$$

2. $f(x) = x^2 + x$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^2 + x - (a^2 + a)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a) + (x - a)}{x - a} \\ &= \frac{(x - a)[(x + a) + 1]}{x - a} = x + a + 1. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{-(x - a)}{xa} = \frac{-1}{xa} \cdot \frac{1}{(x - a)} \\ &= \frac{-1}{xa}, \quad x \neq a \neq 0. \end{aligned}$$

4. $f(x) = x^3 + 1$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

5. $f(x) = -2x$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-2x - (-2a)}{x - a} = \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2.$$

6. $f(x) = x^2 + 1$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + 1 - (a^2 + 1)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

7. $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}.$$

Agora, façamos as mudanças de variáveis, tem-se:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ e \\ k = \sqrt{a} \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 = x \\ e \\ k^2 = a. \end{cases}$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^2 - k^2} = \frac{t - k}{(t - k)(t + k)} \\ &= \frac{1}{t + k} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Este processo é o mesmo; neste caso, que racionalizar. ■

8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}. \quad (1)$$

Assim, fazendo as mudanças de variáveis necessárias, vem:

$$\begin{cases} t = \sqrt[3]{x} \\ e \\ k = \sqrt[3]{a} \end{cases} \implies \begin{cases} t^3 = x \\ e \\ k^3 = a. \end{cases} \quad (2)$$

Daí, levando (2) em (1), segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^3 - k^3} = \frac{t - k}{(t - k)(t^2 + tk + k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2 + tk + k^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}. \end{aligned}$$

■

3.2 Gráfico de uma função

Definição 3.2

Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função. O gráfico de f , denotado por G_f , é dado por:

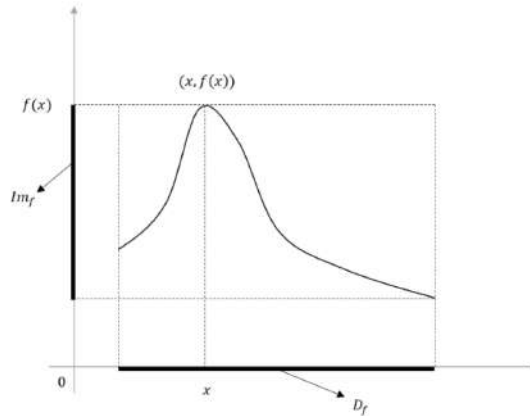
$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B} : y = f(x)\}$$



Observação

Na definição de função, podemos destacar que o gráfico de f é um subconjunto do produto cartesiano de \mathbb{A} por \mathbb{B} . Notação: $G_f \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. (\subseteq está contido ou é igual a).

Esboço do gráfico de f



Guarde com bastante atenção estes fatos:

- (i) De forma intuitiva, o \mathbb{D}_f é a projeção do gráfico de f , sobre o eixo x e a $\text{Im}(f)$ é a projeção do gráfico de f , sobre o eixo y .
- (ii) Toda reta paralela ao eixo y , passando pelo $x \in \mathbb{D}_f$, corta o gráfico de f em um único ponto.

Fato bastante intrigante:

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

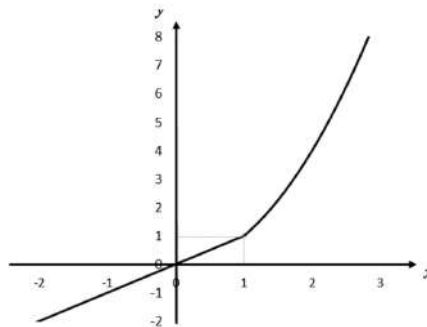
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Não se consegue esboçar um gráfico, nem usando recursos computacionais, porquê?

Exemplo 3.11

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x & x < 1. \end{cases}$

Solução



2. Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \text{ com } x \neq 1,$$

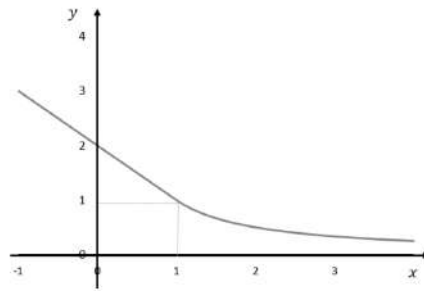
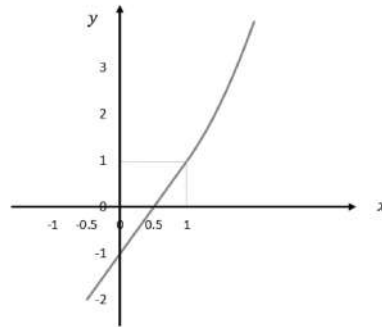
onde:

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases} \quad (ii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -x + 2, & x \leq 1. \end{cases}$$

Esboçando os gráficos em cada caso, temos:

Solução

(i) (ii) (i) 1º Caso: $x > 1 : f(1) = 1^2$



$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

2º Caso: $x < 1 : f(1) = 1^2$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto dado $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x - 1 - 1^2}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2.$$

(ii) 1º Caso: $x > 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$.

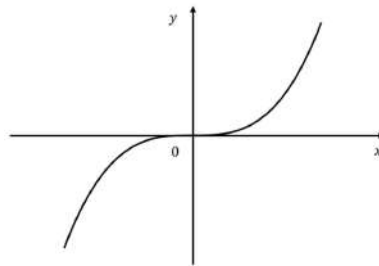
$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{x - 1} = \frac{-(x - 1)}{x} \cdot \frac{1}{(x - 1)} = -\frac{1}{x}$$

2º Caso: $x < 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto, neste caso $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-x + 2 - 1}{x - 1} = \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1.$$

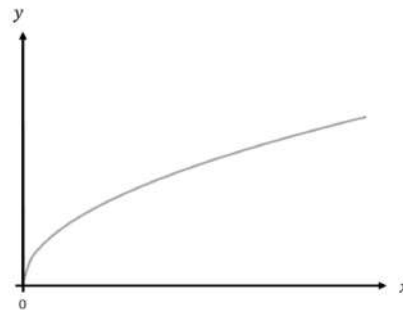
3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f(x) = x^3$.

Solução



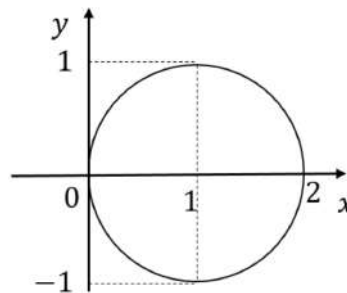
4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução



5. Considere a equação da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

Solução



Neste caso não representa função, visto que: toda reta passado pelo intervalo $0 < x < 2$ corta o gráfico em dois pontos, ou seja, um mesmo elemento do

6. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f(x) = \frac{1}{x}$.

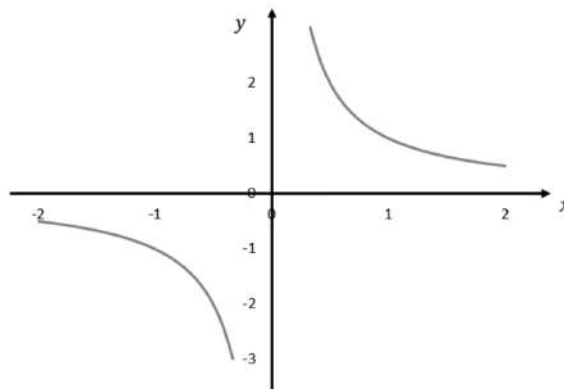
Solução

Facilmente, se ver: $x > 0$ quando aumentamos os valores de x a fração fica bem pequena e bem próximo de zero, os valores são muito grandes, para ilustrar tome $x = 1000$ e $x = \frac{1}{1500}$.

$$\begin{cases} x = 1000 \\ e \\ x = \frac{1}{1500} \end{cases} \implies \begin{cases} f(1000) = \frac{1}{1000} \\ e \\ f\left(\frac{1}{1500}\right) = \frac{1}{\frac{1}{1500}} = 1500. \end{cases}$$

de forma análoga, para $x < 0$, vejamos:

$$\begin{cases} x = -1000 \\ e \\ x = -\frac{1}{1500} \end{cases} \implies \begin{cases} f(-1000) = -\frac{1}{1000} \\ e \\ f\left(-\frac{1}{1500}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{1500}} = -1500. \end{cases}$$



3.3 Funções Polinomiais

3.3.1 Função Polinomial do 1º grau

Definição 3.3

Chama-se função polinomial do 1º grau a:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.



Exemplo 3.12

1. $f(x) = 2x + 4$

2. $f(x) = -2x + 1$

 **Observação**

(A) Na definição, tem-se:

a = coeficiente angular da reta

b = coeficiente linear da reta

(B) Critério para esboçar um gráfico de uma reta:

(i) Faça $x = 0 \implies y = f(0) = b$ (valor que corta o eixo y)

(ii) Faça $y = 0 \implies ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$ (temos o zero da função, ou seja, o valor que corta o eixo x)

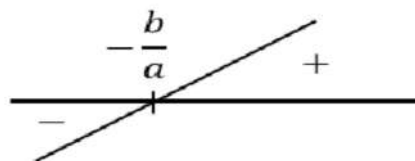
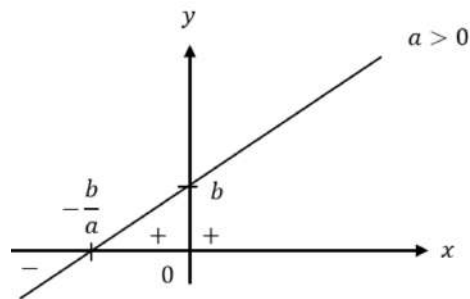
(C) Fatos:

(i) Se $a > 0$, então, f é crescente: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \implies a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Logo, f é crescente. ■

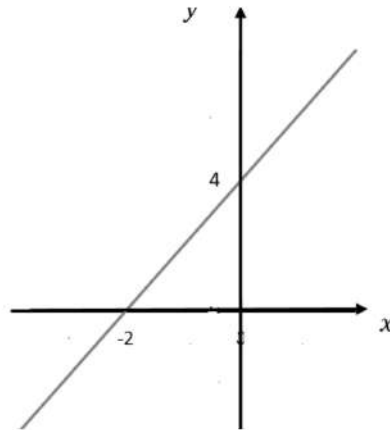


1. $f(x) = 2x + 4$

Para $x = 0 \implies y = f(0) = 4$ (Valor que corta o eixo y)

Para $y = 0 \implies 2x + 4 = 0 \implies 2x = -4 \implies x = -2$

(Valor que corta o eixo x ou zero da função)

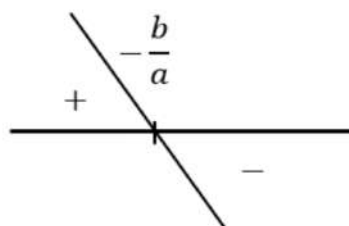
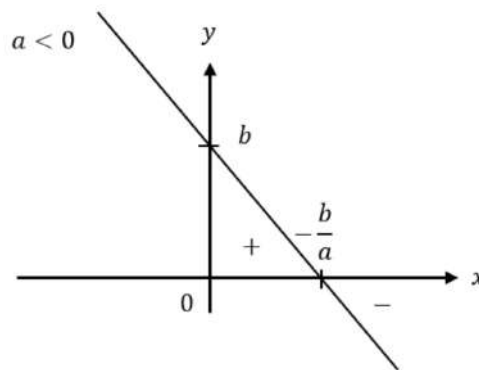


(ii) Se $a < 0$, então, f é decrescente: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

$$x_1 < x_2 \implies a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Logo, f é decrescente. ■



Casos particulares: da função

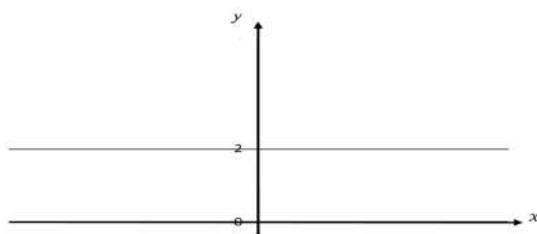
$$f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$$

Função Constante:

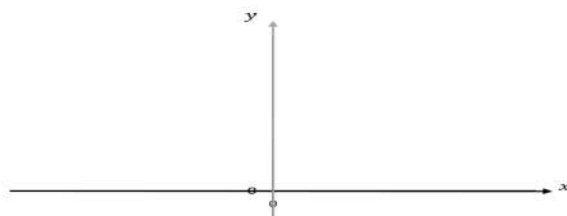
$$a = 0 \implies f(x) = b$$

Exemplos:

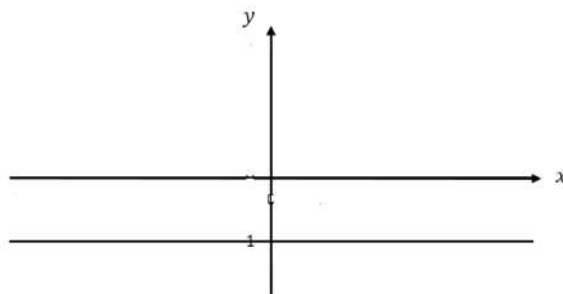
1. $f(x) = 2$



2. $f(x) = 0$



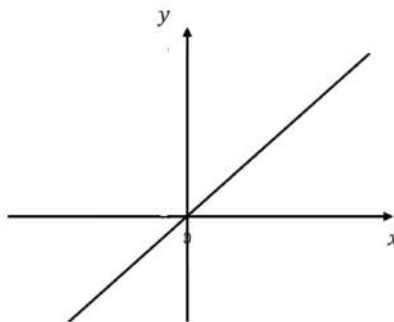
3. $f(x) = -1$



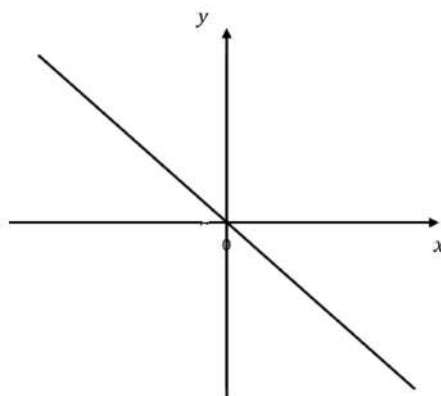
Função Identidade:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = x$.

(Como o próprio nome diz: identidade, a cada x do domínio sua imagem $y = x$ é o mesmo valor)



Reflexão de $f(x) = x$ em torno do eixo x , obtemos: $g(x) = -x$



Observação

Note que f satisfaz:

$$(i) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

$$(ii) \forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x_1 \in \mathbb{R} : f(\alpha x_1) = (\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha f(x_1)$$

■

Função Linear

$$f(x) = ax, \text{ com } a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$



Observação

Note que f satisfaz:

$$(i) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

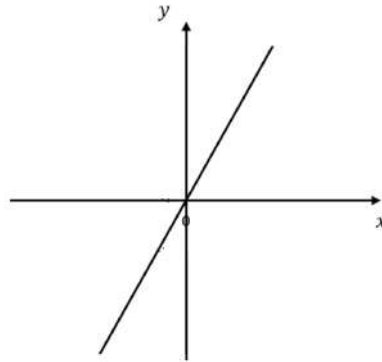
$$(ii) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in \mathbb{R} : f(\alpha x_1) = a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = \alpha f(x_1)$$

Toda função (transformação) que satisfaz estas duas condições chamamos de Linear.

■

Exemplo 3.13

1. $f(x) = 2x$

**Observação**

(A) O quociente de Newton

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2x - 2a}{x - a} = \frac{2(x - a)}{x - a} = 2.$$

Maravilha de se ver: o coeficiente angular da reta $m = \operatorname{tg}\theta = 2$ (f é crescente $a = 2$.)

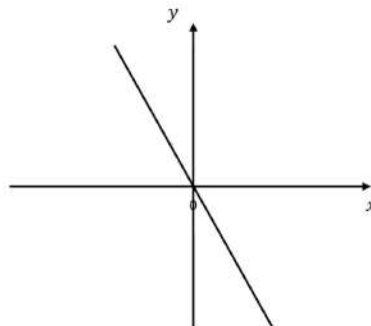
(B) Sinal de f :

$x > 0 \implies f$ é positiva (gráfico está acima do eixo x) e

$x < 0 \implies f$ é negativa (gráfico está abaixo do eixo x).



2. $f(x) = -2x$

**Observação**

(A) O quociente de Newton

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-2x - (-2a)}{x - a} = \frac{-2x + 2a}{x - a} = \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2.$$

Maravilha de se ver: o coeficiente angular da reta $m = \operatorname{tg}\theta = -2$

(f é decrescente $a = -2$.)

(B) Sinal de f :

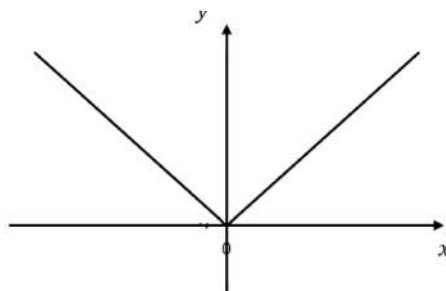
$x > 0 \implies f$ é negativa (gráfico está abaixo do eixo x) e

$x < 0 \implies f$ é positiva (gráfico está acima do eixo x).

Exercício 3.2

Use translação e reflexão de eixos para esboçar o gráfico de f :

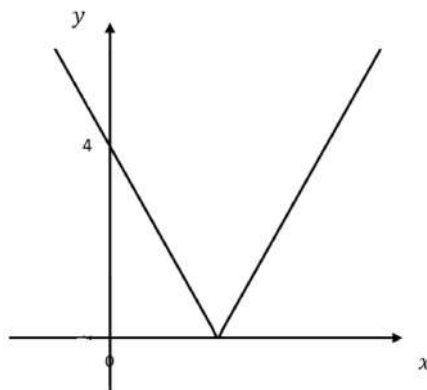
$$1. f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

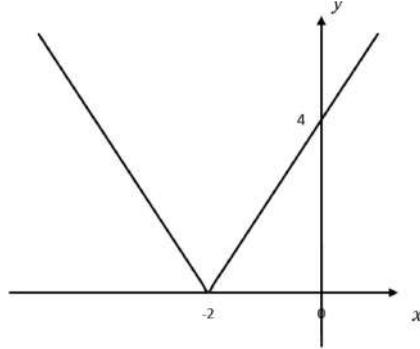
$$2. f(x) = |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -2x + 4 & x < 2 \end{cases}$$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

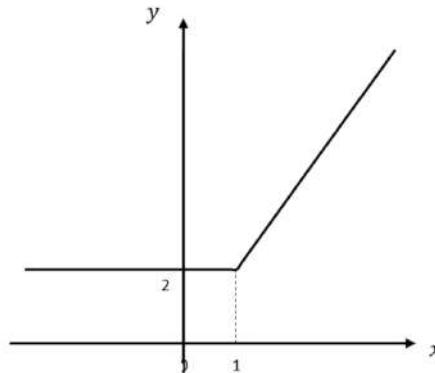
$$3. f(x) = |2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4, & x \geq -2 \\ -2x - 4 & x < -2 \end{cases}$$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

$$4. g(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}.$$



3.3.2 Função Polinomial do 2º grau

Definição 3.4

Chama-se função polinomial do 2º grau a:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.



Exemplo 3.14

$$1. f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$2. f(x) = -x^2 + 1$$

$$3. f(x) = x^2 + x + 1$$

$$4. f(x) = x^2 - 2x$$

Teorema 3.1 (Zeros da função)

Seja

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Então, suas raízes são dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

**Demonstração**

Com efeito, usando o procedimento de completamento de quadrados, tem-se:

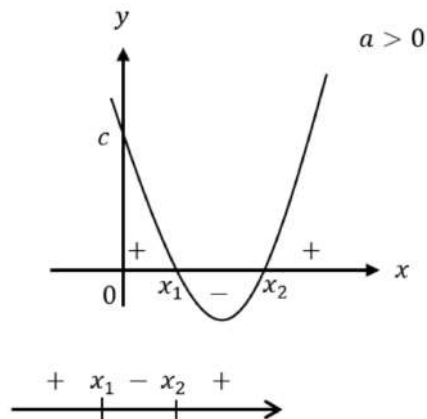
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \implies a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = 0 \\ \implies a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] &= 0 \\ \implies \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right] &= 0 \\ \implies \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}. \end{aligned}$$

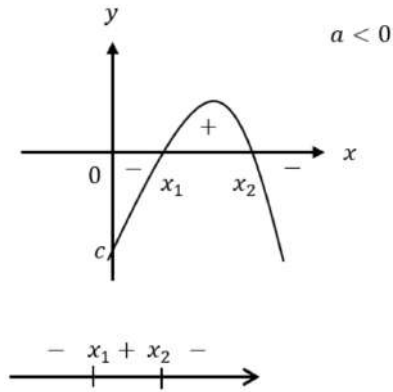
Agora, fazendo $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \implies x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De sorte que:

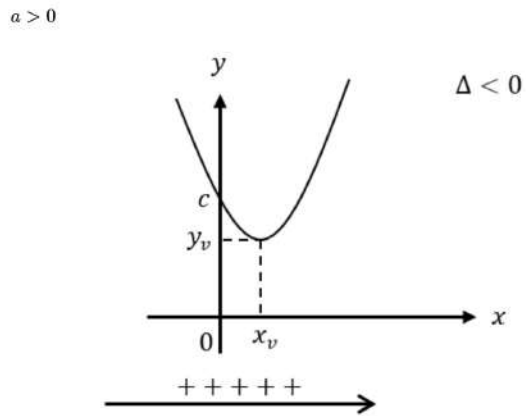
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

1º Caso: $\Delta > 0$ existem duas raízes reais e distintas x_1 e x_2 .

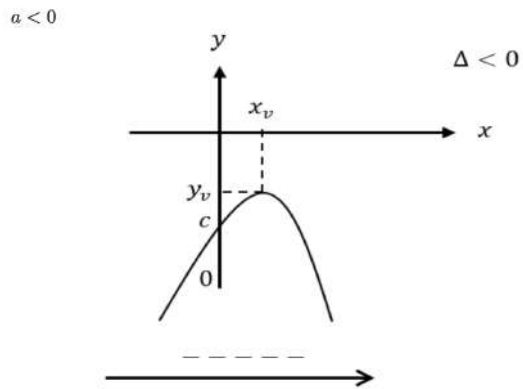


2º Caso: $\Delta < 0$ não existem raízes reais.

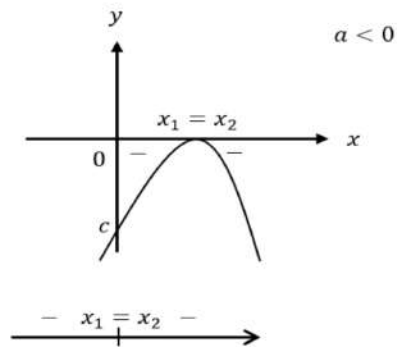
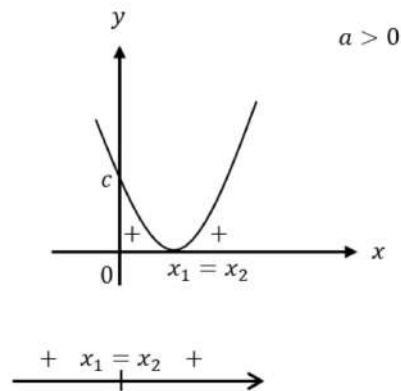
$a > 0$



$a < 0$



3º Caso: $\Delta = 0$ existem duas raízes reais e iguais $x_1 = x_2$.



Teorema 3.2

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Então, tem-se:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v,$$

onde (x_v, y_v) é o vértice da parábola, onde:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$



Demonstração

Com efeito, usando o procedimento de completamento de quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right], \end{aligned}$$

onde:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

De sorte que:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$

**Critério para esboçar um gráfico de uma função quadrática:**

1. Uma forma é usando completamento de quadrados e obter a forma:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$

Em seguida, usar translações e reflexões dos eixos coordenados.

2.

(i) Faça $x = 0 \implies y = f(0) = c$ (valor que corta o eixo y)

(ii) Faça $y = 0 \implies ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta \geq 0 \implies$ (temos o zero da função, ou seja, os valores que cortam o eixo x). Caso contrário, temos:

$\Delta < 0 \implies$ (não existe valores que corte o eixo x)

(iii) Obter o vértice $V(x_v, y_v)$, onde:

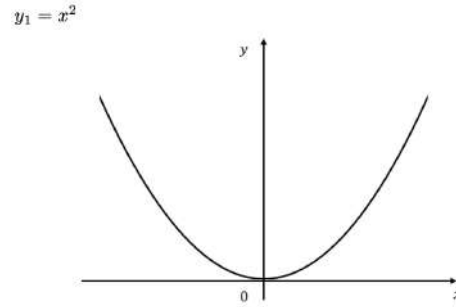
$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

(iv) Esboço do gráfico de f .

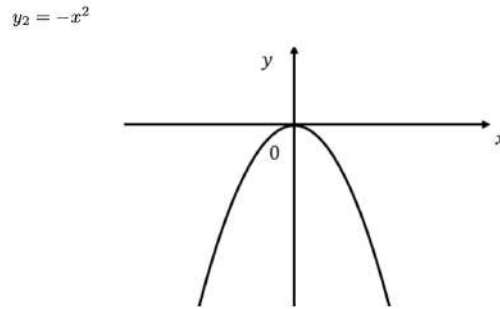
Exemplo 3.15

Esboçar os gráficos usando translações e reflexões de eixos:

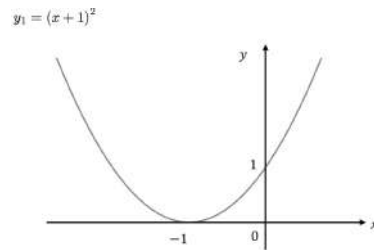
1. $y_1 = x^2$



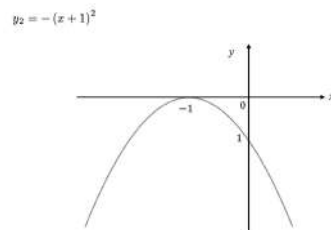
$y_2 = -x^2$



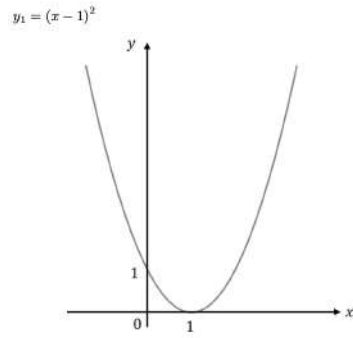
2. $y_1 = (x + 1)^2$



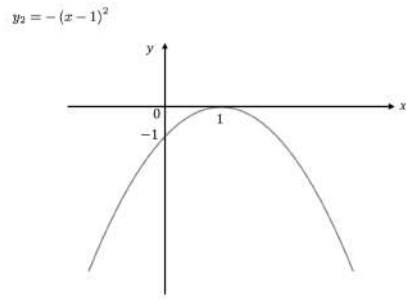
$y_2 = -(x + 1)^2$



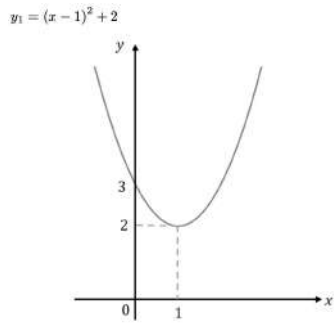
3. $y_1 = (x - 1)^2$



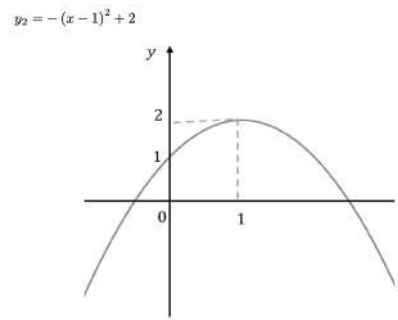
$y_2 = -(x - 1)^2$



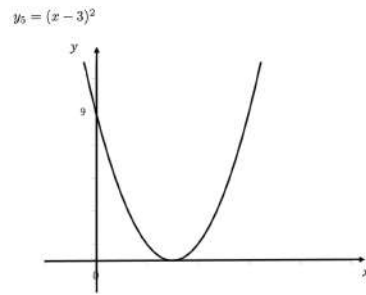
(**) $y_1 = (x - 1)^2 + 2$



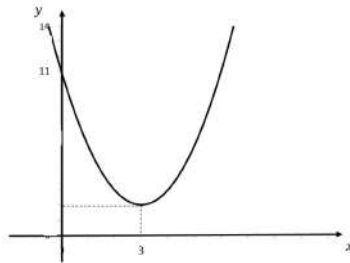
$y_2 = -(x - 1)^2 + 2$



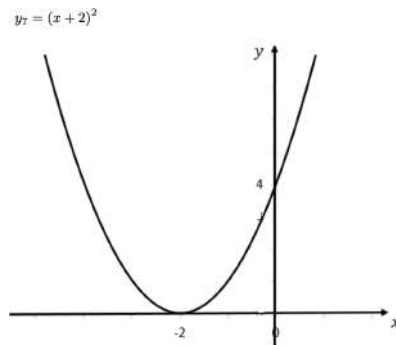
4. $y_5 = (x - 3)^2$



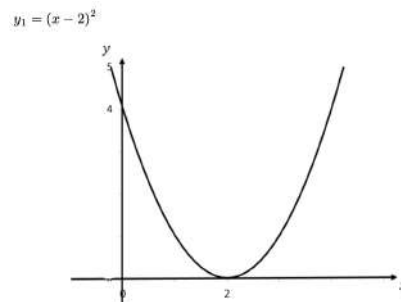
5. $y_6 = (x - 3)^2 + 2$



6. $y_7 = (x + 2)^2$



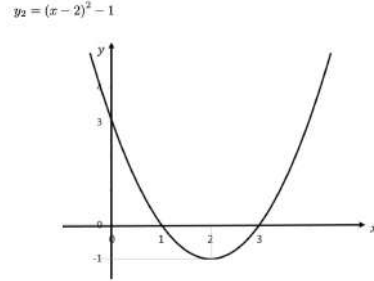
7. $y_7 = |(x - 2)^2 - 1|$
 $y_1 = (x - 2)^2$



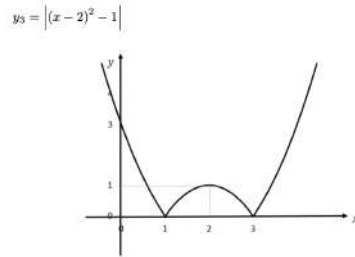
continua na próxima página ...

... continuação

$$y_2 = (x - 2)^2 - 1$$



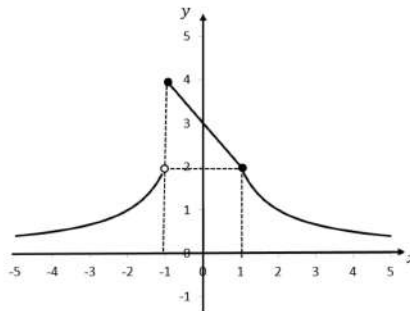
$$y_3 = |(x - 2)^2 - 1|$$



$$8. f(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|}, & |x| > 1 \\ 3 - x, & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Lembrando

$$|x| > 1 \iff \begin{cases} x < -1 \\ \text{ou} \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1.$$



Destacando:

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$

Imagem de $f : \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 4\}$

Exemplo 3.16

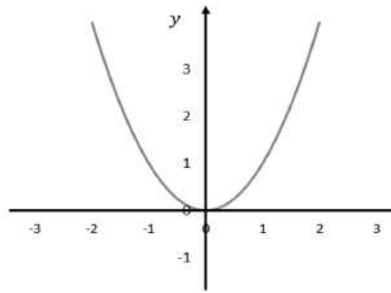
1. $f(x) = x^2 - 6x$

Usando completamento de quadrados, em seguida, translações de eixos, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x \implies f(x) = x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 - \left(\frac{-6}{2}\right)^2 \\ \implies f(x) &= x^2 - 6x + 9 - 9 \implies f(x) = (x - 3)^2 - 9. \end{aligned}$$

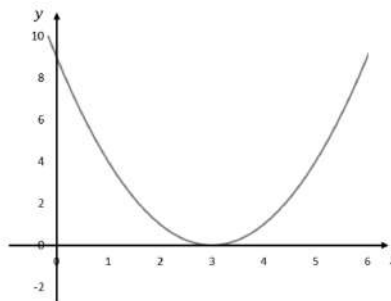
(i) $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$



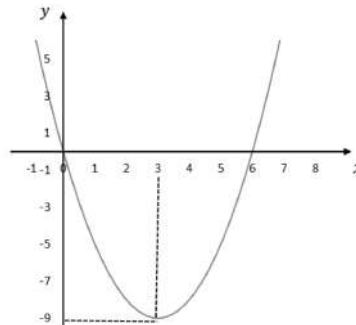
(ii) $f(x) = (x - 3)^2$

$f(x) = (x - 3)^2$



(iii) $f(x) = (x - 3)^2 - 9$

$f(x) = (x - 3)^2 - 9$



2º modo:

$$f(x) = x^2 - 6x$$

(i) $x = 0 \implies f(0) = 0$

(ii) $f(x) = 0 \implies x^2 - 6x = 0 \implies x(x - 6) = 0 \implies \begin{cases} x = 6 \\ \text{ou} \\ x = 0. \end{cases}$

(iii) $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 36$

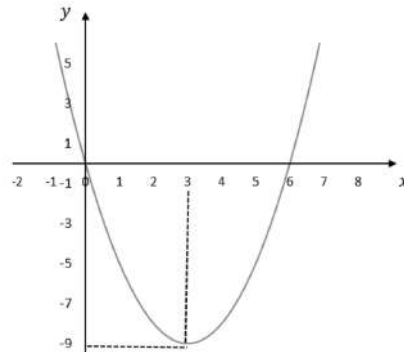
$$\begin{cases} x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \\ y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4} = -9 \end{cases} \implies V(3, -9).$$

Vértice da parábola.

(iv) Esboço do gráfico de f

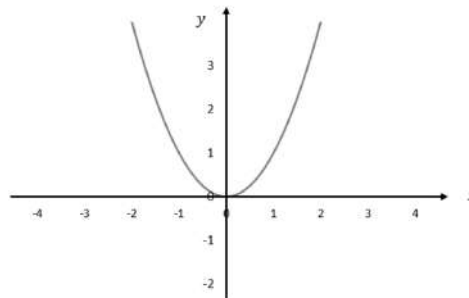
$$f(x) = x^2 - 6x$$

$$f(x) = x^2 - 6x$$



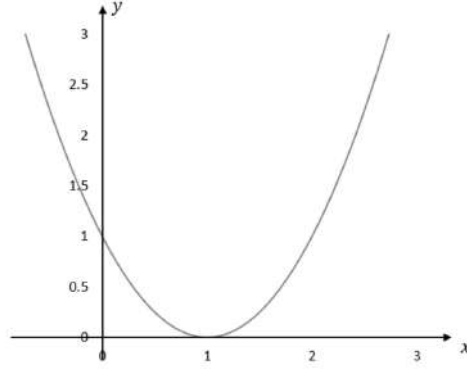
Exemplo 3.17

1. (i) $f(x) = x^2$ continua na próxima página ...

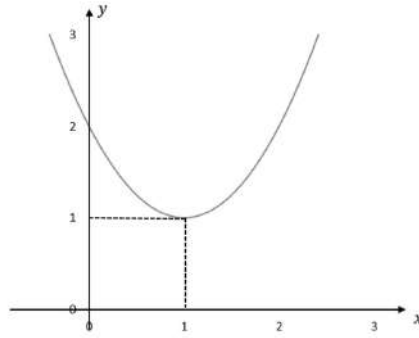


... *continuação*

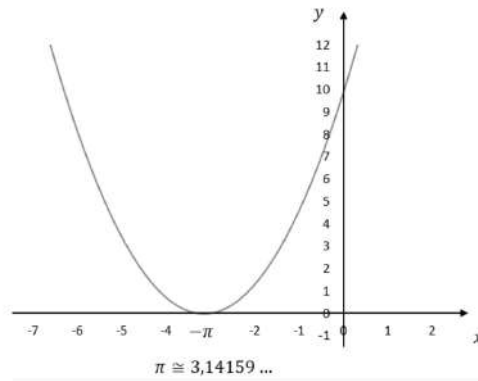
(ii) $f(x) = (x - 1)^2$



(iii) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

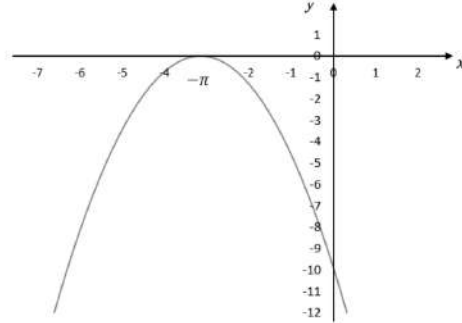


2. (i) $f(x) = (x + \pi)^2$ *continua na próxima página ...*

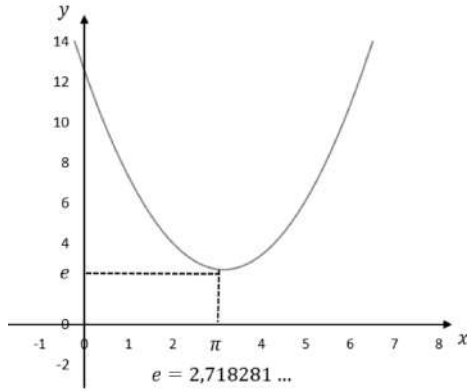


... *continuação*

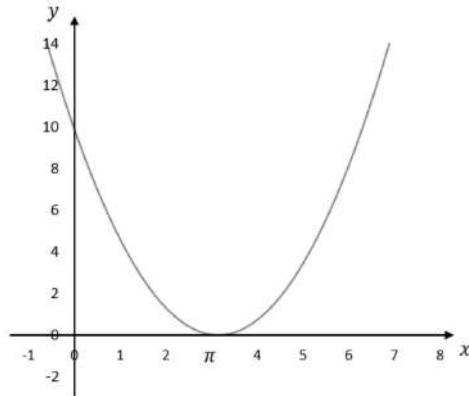
(ii) $f(x) = -(x + \pi)^2$



3. $f(x) = (x - \pi)^2 + e$, onde: $\pi = 3,14159\dots$ e $e = 2,718281\dots$

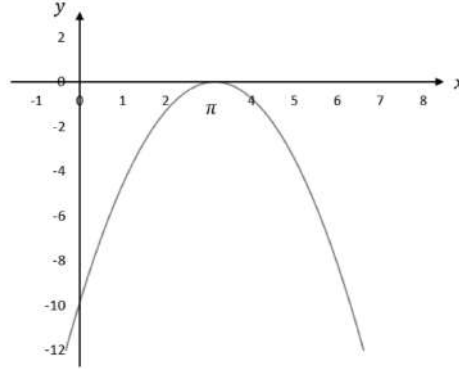


(i) $f(x) = (x - \pi)^2$ *continua na próxima página ...*

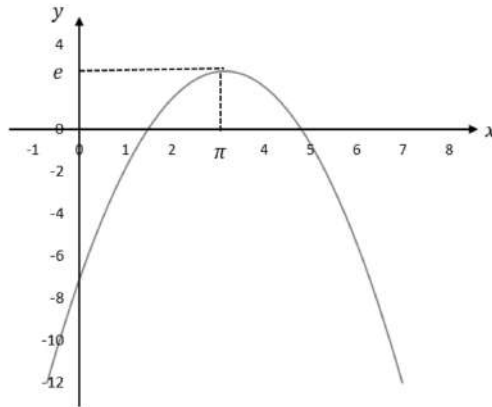


... continuação

(ii) $f(x) = -(x - \pi)^2$



(iii) $f(x) = -(x - \pi)^2 + e$



Problema 3.2

Para determinar o valor de "a" de uma grandeza foram feitas, em laboratório, n medições. Os valores encontrados foram x_1, x_2, \dots, x_n . Resolveu-se adotar como estimativa de "a" o valor para o qual a soma dos quadrados dos erros das medidas fosse mínimo. Que valor é esse?

Solução

Seja

$$\Phi(a) = (a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + \dots + (a - x_n)^2,$$

então, fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtemos:

$$\Phi(a) = na^2 - 2a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

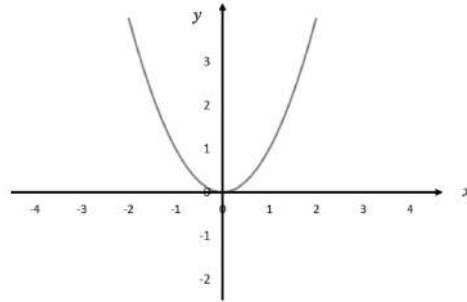
De sorte que, a abscissa do vértice produz

$$a_V = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

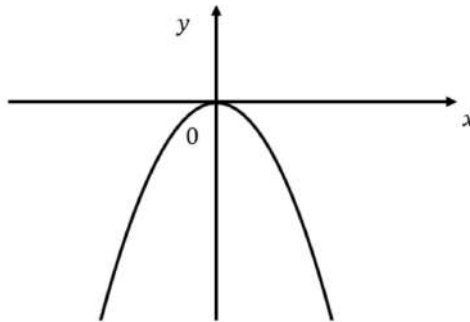
■

3.4 Gráficos de funções Elementares

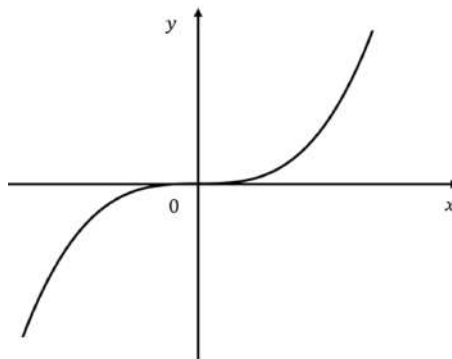
1. (i) $f(x) = x^2$



(ii) $f(x) = -x^2$

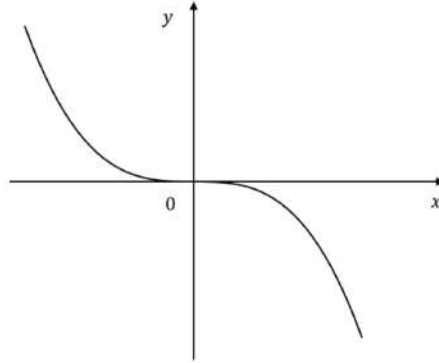


2. (i) $f(x) = x^3$ continua na próxima página ...

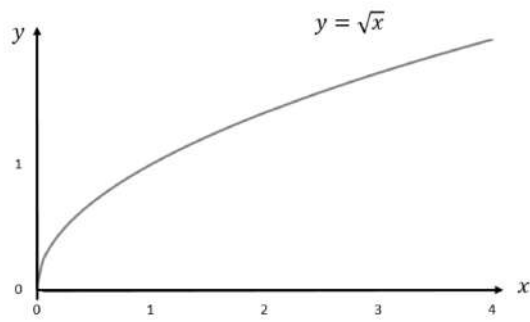


... continuação

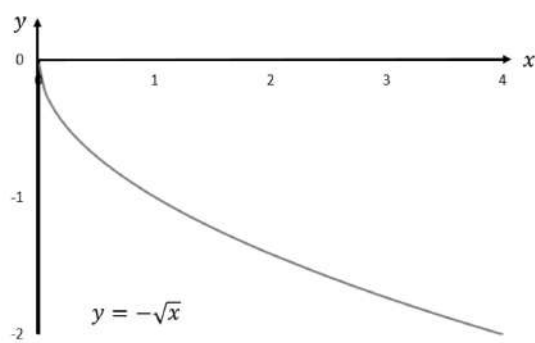
(ii) $f(x) = -x^3$



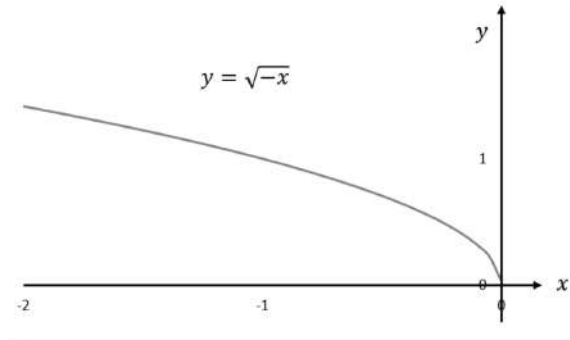
3. (i) $f(x) = \sqrt{x}$



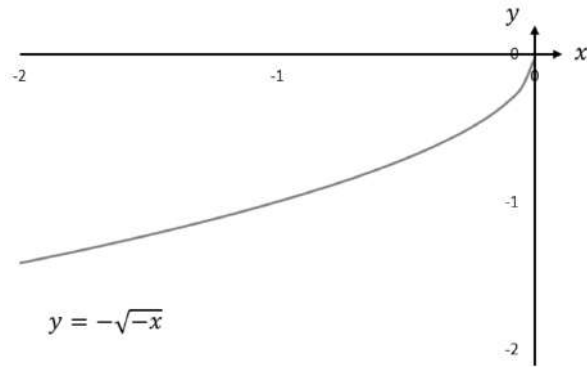
(ii) $f(x) = -\sqrt{x}$



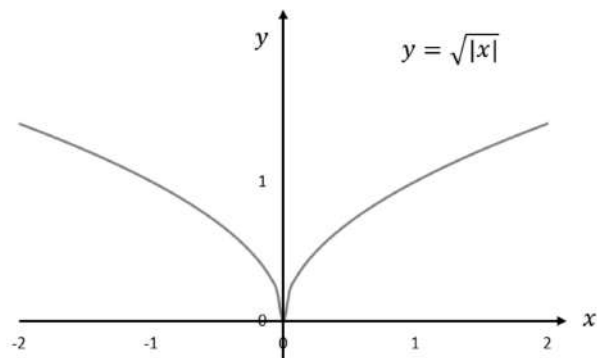
4. (i) $f(x) = \sqrt{-x}$



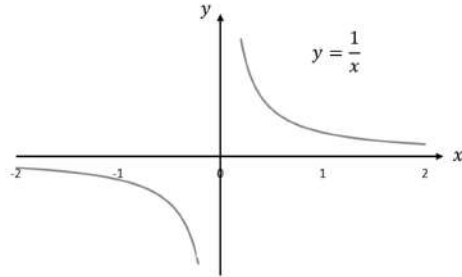
(ii) $f(x) = -\sqrt{-x}$



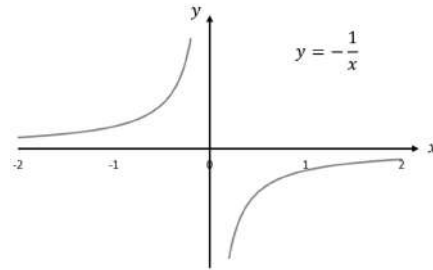
5. $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$



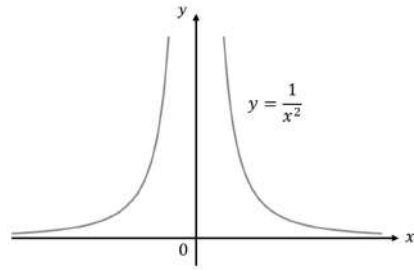
6. (i) $f(x) = \frac{1}{x}$



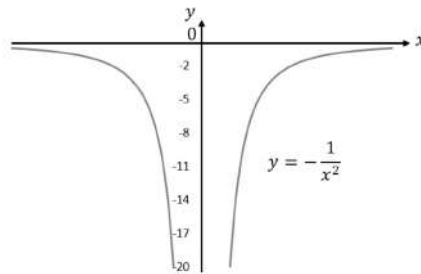
(ii) $f(x) = -\frac{1}{x}$



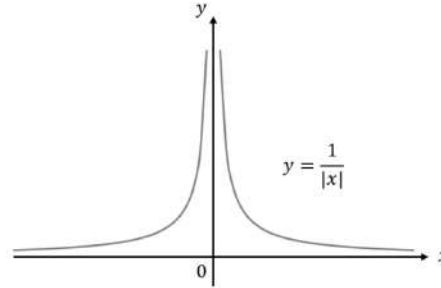
7. (i) $f(x) = \frac{1}{x^2}$



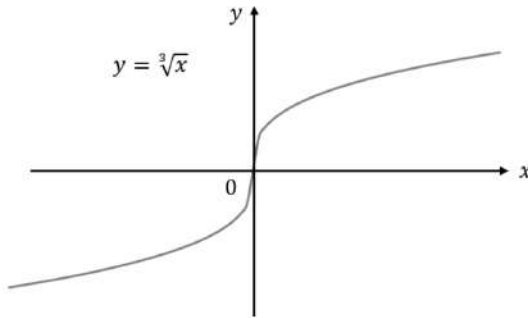
(ii) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$



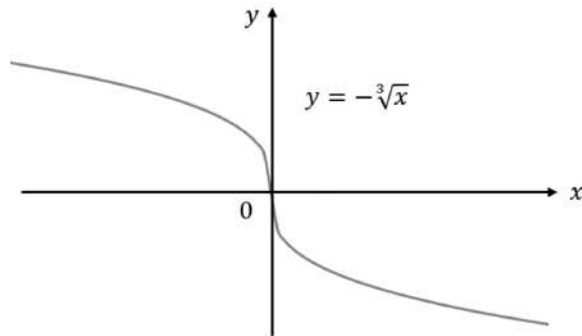
$$8. f(x) = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$



$$9. (i) f(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$(ii) f(x) = -\sqrt[3]{x}$$



Uma pausa para comentar sobre a função exponencial de base "e"

Seja

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2,718 = e.$$

então, fazendo $n = 1, 2, 3, \dots$, tem-se:¹

$$a_1 = (1 + 1)^2 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \simeq 2,37$$

⋮

Daí, continuando com o processo, segue-se que:

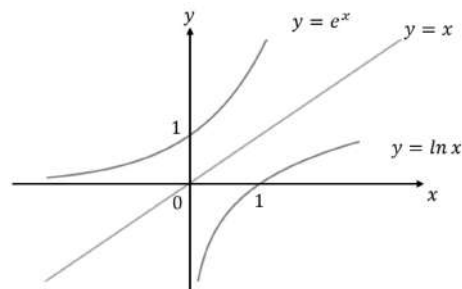
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2,718\dots = e.$$

Cujo valor é aproximadamente:

$$e \simeq 2,718281828459045235360287\dots$$

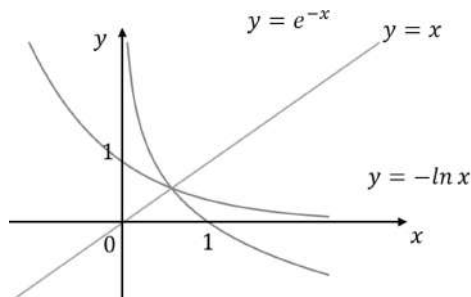
10. (i) $f(x) = e^x$

(ii) $g(x) = \ln x$



11. (i) $f(x) = e^{-x}$

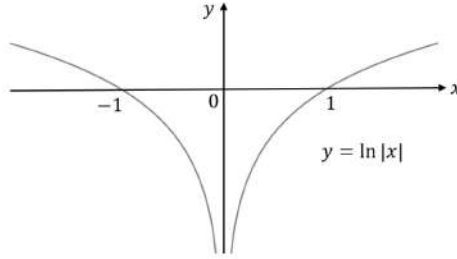
(ii) $g(x) = -\ln x$



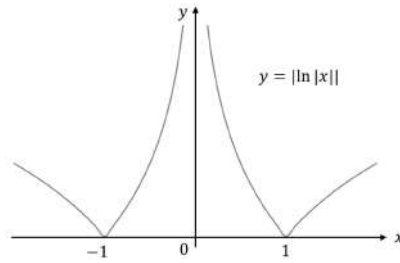
¹O número "e" é uma constante matemática que é a base dos logaritmos naturais. Por vezes é chamado número de Euler (não confundir com a constante de Euler) em homenagem ao **matemático suíço Leonhard Euler**, número de Napier, em homenagem a **John Napier**, número de Neper, constante de Néper, número neperiano, número exponencial e outros. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2,711828\dots = e$$

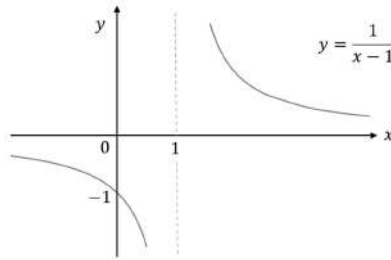
12. (i) $f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



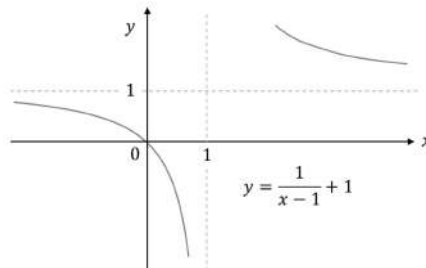
(ii) $f(x) = |\ln|x||$



13. $f(x) = \left| \frac{1}{x-1} + 1 \right|$
 (i) $f(x) = \frac{1}{x-1}$



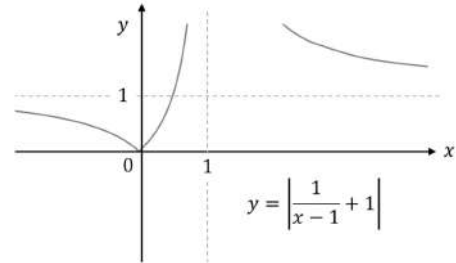
(ii) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$



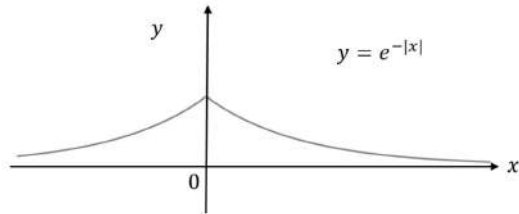
continua na próxima página ...

... continuação

(iii) $f(x) = \left| \frac{1}{x-1} + 1 \right|$

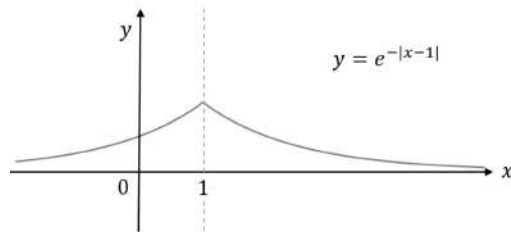


14. (i) $y_1 = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^{-(-x)}, & x < 0 \end{cases}$



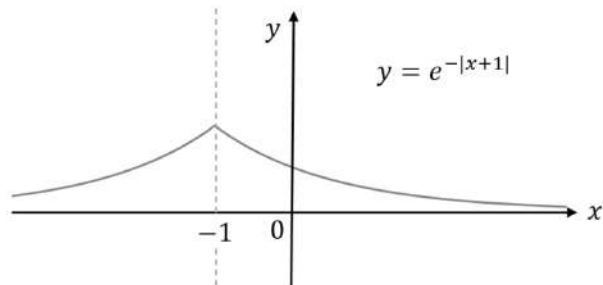
(ii) $y_2 = e^{-|x-1|}$

(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{-|x|}$ deslocando uma unidade à direita)

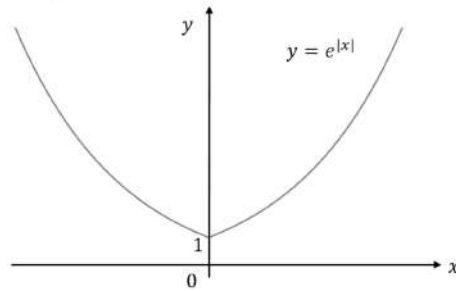


(iii) $y_2 = e^{-|x+1|}$

(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{-|x|}$ deslocando uma unidade à esquerda)

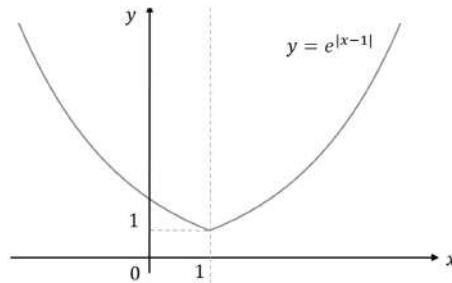


15. (i) $y_1 = e^{|x|}$



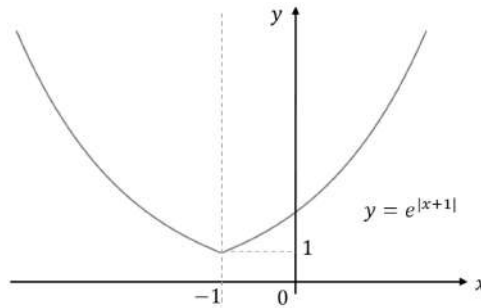
(ii) $y_2 = e^{|x-1|}$

(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{|x|}$ deslocando uma unidade à direita)

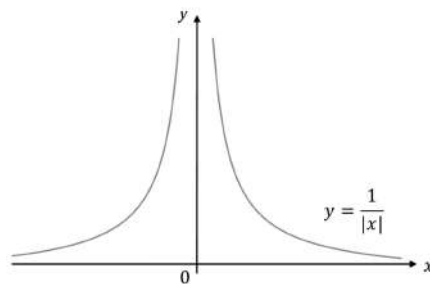


(iii) $y_2 = e^{|x+1|}$

(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{|x|}$ deslocando uma unidade à esquerda)



16. $y_1 = \frac{1}{|x|}$

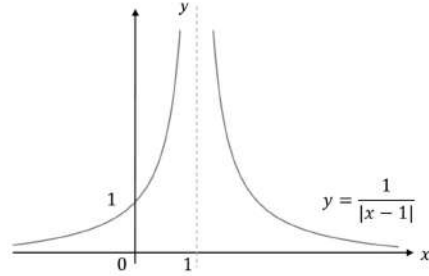


continua na próxima página ...

... continuação

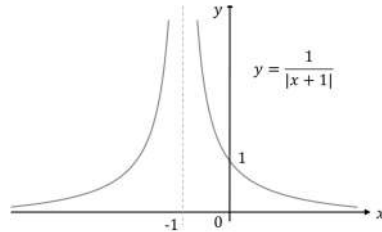
(ii) $y_2 = \frac{1}{|x-1|}$

O gráfico de $y_2 = \frac{1}{|x-1|}$ é obtido de $y_1 = \frac{1}{|x|}$ deslocando 1 unidade à direita.

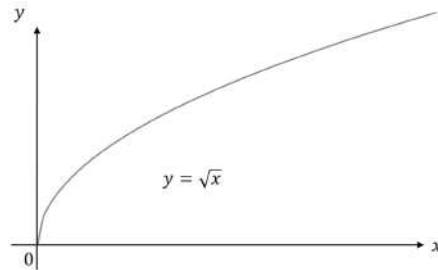


(iii) $y_3 = \frac{1}{|x+1|}$

O gráfico de $y_3 = \frac{1}{|x+1|}$ é obtido de $y_1 = \frac{1}{|x|}$ deslocando 1 uma unidade à esquerda.

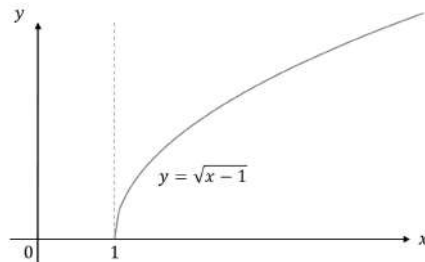


17. $y = \sqrt{x}$



(i) $y_1 = \sqrt{x-1}$

O gráfico de $y_1 = \sqrt{x-1}$ é obtido de $y = \sqrt{x}$ deslocando 1 unidade à direita.

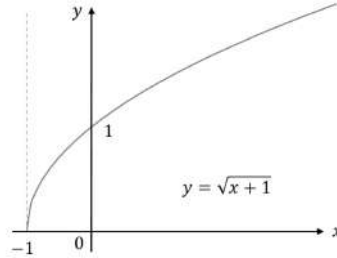


continua na próxima página ...

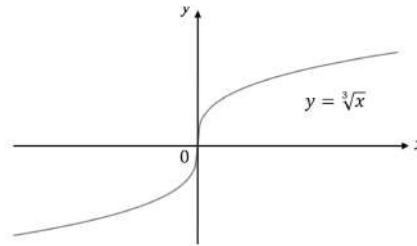
... *continuação*

(ii) $y_2 = \sqrt{x+1}$

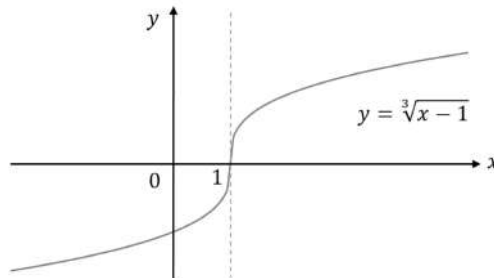
O gráfico de $y_2 = \sqrt{x+1}$ é obtido de $y = \sqrt{x}$ deslocando 1 unidade à esquerda.



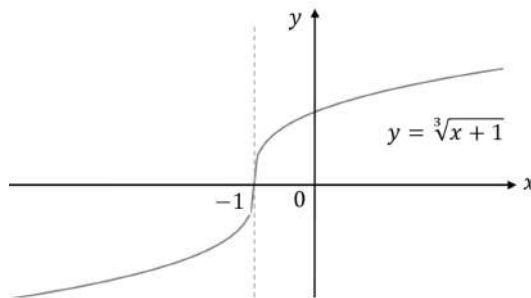
18. $y = \sqrt[3]{x}$



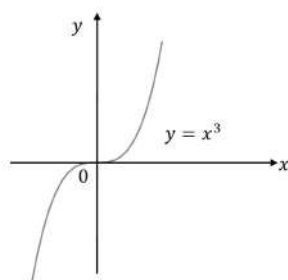
(i) $y = \sqrt[3]{x-1}$ é obtido de $y = \sqrt[3]{x}$ deslocando uma 1 unidade à direita.



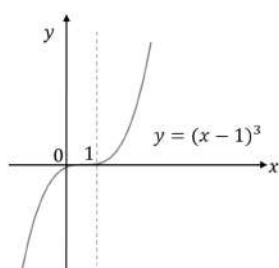
(ii) $y = \sqrt[3]{x+1}$ é obtido de $y = \sqrt[3]{x}$ deslocando uma 1 unidade à esquerda.



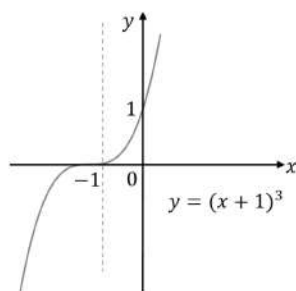
19. $y = x^3$



(i) $y_1 = (x - 1)^3$ é obtido de $y = x^3$ deslocando uma 1 unidade à direita.



(ii) $y_2 = (x + 1)^3$ é obtido de $y = x^3$ deslocando uma 1 unidade à esquerda.



Capítulo 4

Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real.



Nikolai Lobachevsky (1792 – 1856)

A Matemática é o único material de instrução que pode ser apresentado de uma forma totalmente não dogmática.



Max Wilhelm Dehn (1878 – 1952)

Neste Capítulo, vamos abordar funções do tipo: pares e ímpares, injetoras, sobrejetoras e bijetora, composições de funções, definindo a função inversa através da composição de funções, ressaltando que: a inversa será definida usando a composição, tendo a composta da função com sua inversa o resultado a função identidade. Além disso, deduzindo que se a função é invertível, por conseguinte: a mesma será injetora e sobrejetora, óbvio que a recíproca ou contra-positiva é trivial (funções bijetoras são invertíveis). Para concluir o Capítulo, voltamos ao tema de funções exponenciais e logarítmicas, destacando a exponencial de base "e" por se tratar de uma função exponencial, onde

tem diversos fenômenos naturais que as utiliza como modelagem matemática: crescimento populacional, infecções por vírus, meia-vida de elementos radioativos ou decaimento radioativos, com função logarítmica modela situações de abalos sísmicos, veremos também como consequências da injetividade, crescimento e decréscimo das funções exponenciais e logarítmicas, as equações e inequações exponenciais e logarítmicas.

4.1 Funções Pares e Ímpares

Definição 4.1

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

(i) f é par, se: $f(x) = f(-x), \forall x \in X = D(f)$

(ii) f é ímpar, se: $f(x) = -f(-x), \forall x \in X = D(f)$.



Exemplo 4.1

Verifique quais das funções são pares ou ímpares:

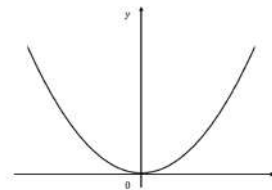
1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2$

Basta observar que:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico $f(x) = x^2$



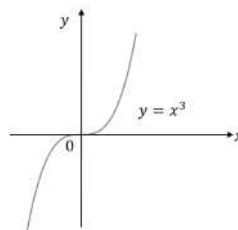
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^3$

com efeito,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico $f(x) = x^3$



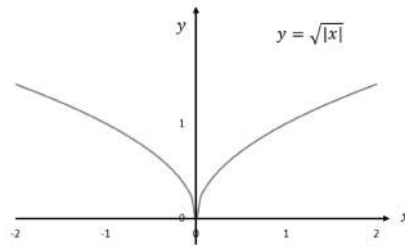
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \sqrt{|x|}$

Basta notar:

$$f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico $f(x) = \sqrt{|x|}$



4. $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2$.

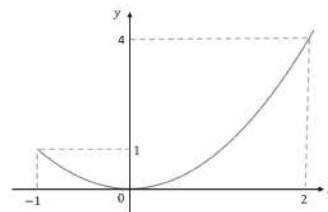
Cuidado!

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

não vale $\forall x \in D(f) = [-1, 2]$, por exemplo, $f(2) = 2^2$ e $f(-2)$ não está definida no intervalo. Logo, f não é uma função par nem ímpar.

Assim, devemos ter o cuidado com a função e se vale a simetria para todo valor do domínio da função.

Esboço do gráfico de $f(x) = x^2, \forall x \in [-1, 2]$



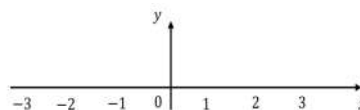
Observação

A única função par e ímpar ao mesmo tempo é a função identicamente nula

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$f(-x) = 0 = f(x), \text{ } f \text{ é uma função par}$$

$$f(-x) = 0 = -f(x), \text{ } f \text{ é uma função ímpar.}$$

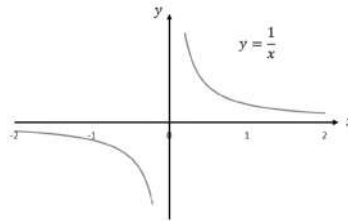


5. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{1}{x}$
com efeito,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$

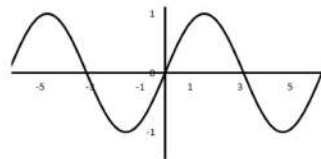


6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \sin x$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \sin x$



Destacando

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$.

Imagem de $f : \text{Im}(f) = [-1, 1]$

Período de $f : p(f) = 2\pi$

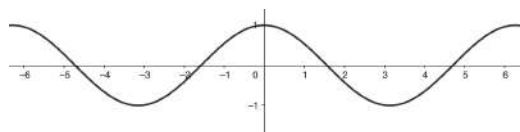
7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \cos x$

Basta observar que:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico de $f(x) = \cos x$



Destacando

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$.

Imagem de $f : \text{Im}(f) = [-1, 1]$

Período de $f : p(f) = 2\pi$

8. A função *tangente* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

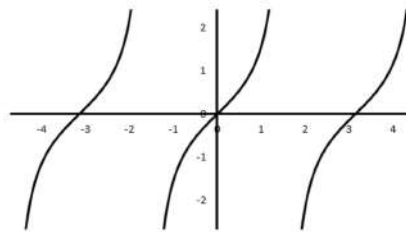
$$f(x) = \text{tg } x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \text{tg}(-x) = -\text{tg}(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \text{tg } x$.



Destacando:

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) Imagem de $f : \text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e

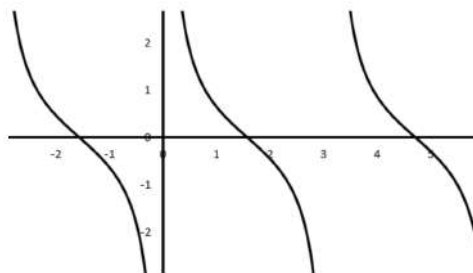
(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

9. A função *cotangente* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \text{cotg } x.$$

Basta observar que: $f(-x) = \text{cotg}(-x) = -\text{cotg}(x) = -f(x)$,
 $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}$. Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \text{cotg } x$.



Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) Imagem de $f : \text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e

(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

10. A função *secante* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$,
definida por:

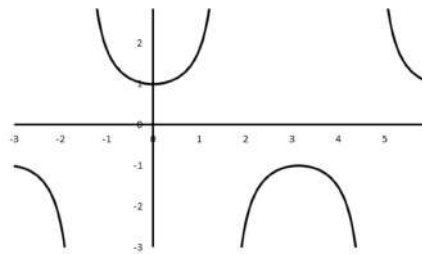
$$f(x) = \sec x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \sec(-x) = \sec(x) = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico de $f(x) = \sec x$.



Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) Imagem de $f : \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e

(iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

11. A função *cossecante* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

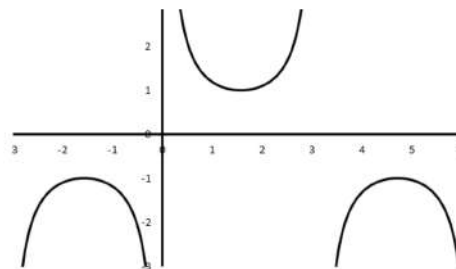
$$f(x) = \text{cossec } x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \text{cossec}(-x) = -\text{cossec}(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

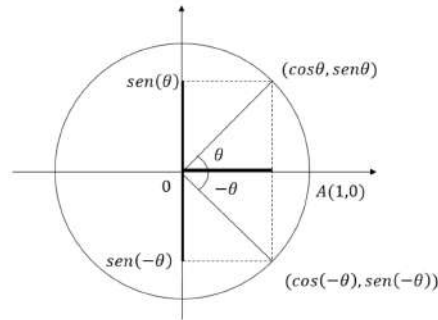
Esboço do gráfico de $f(x) = \text{cossec } x$.



Destacando

- (i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
- (ii) Imagem de $f : \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
- (iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

Funções trigonométricas pares e ímpares



(i) $\cos(-\theta) = \cos \theta$ (ii) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$.

Consequências

- (i) $\sec(-\theta) = \sec \theta$ (ii) $\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec} \theta$
- (iii) $\text{tg}(-\theta) = -\text{tg} \theta$ (iv) $\text{cotg}(-\theta) = -\text{cotg} \theta$.

4.2 Composições de Funções

Definição 4.2

Sejam

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & \mathbb{R} \end{array}$$

Onde:

- (i) $\text{Im}(g)$: Imagem da função g
- (ii) $\text{Im}(g) \subseteq B$: A imagem da função g está contida ou é igual ao domínio da função f .
- (iii) $f \circ g \implies f^2 = f \circ f, f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f$ e $f^0 = \mathbb{I}$ (função Identidade).



Observação

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}, \quad f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f \quad \text{e} \quad f^0 = \mathbb{I}.$$

Exemplo 4.2

1. Considere as funções f e g , definidas por: $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Pede-se, caso existam:

- (i) $D(f \circ g)$ e $f \circ g$ (ii) $D(g \circ f)$ e $g \circ f$

Solução

É fundamental obter primeiro os domínios das funções, alguns textos do Ensino Médio, induz que se pode fazer o contrário, ou seja, determinar a composta, para só em seguida, obter o domínio. Estes exemplos esclarecem que, se fizermos o contrário, daria errado. Vejamos

$$\begin{aligned} D(f \circ g) &= \{x \in \mathbb{R}; x \in D(g) \wedge \text{Im}(g) \in D(f)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \wedge (\sqrt{x}) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Agora,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

Note que: se por um momento de fraqueza, fizéssemos $f \circ g$ antes de obter o $D(f \circ g)$ existiria

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

Absurdo! visto que $\sqrt{-1} \notin D(g)$.

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R}; x \in D(f) \wedge \text{Im}(f) \in D(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; (x \in \mathbb{R}) \wedge x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Consequentemente, em geral se tem: $f \circ g \neq g \circ f$, ou ainda, composições de funções não é comutativa.

Guarde bem e nunca esqueça!

Obter a composta de duas funções $f \circ g$ e $g \circ f$, antes é necessário, obter o domínio de existência, caso sejam possíveis.



2. Considere as funções f e g , definidas por: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Pede-se, caso existam:

- (i) $D(f \circ g)$ e $f \circ g$ (ii) $D(g \circ f)$ e $g \circ f$

Solução

$$(i) D(f \circ g) \text{ e } f \circ g : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \text{ e } g(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(g) \text{ e } g(x) \in D(f)\}.$$

Vejamos

$$x - 3 > 0 \implies x > 3 \implies D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$$

e

$$x^2 - 1 \neq 0 \implies x \neq \pm 1 \implies D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}.$$

Assim,

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \text{ e } g(x) > 3\}.$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 1} > 3 &\iff \frac{1}{x^2 - 1} - 3 > 0 \\ &\iff \frac{1 - 3x^2 + 3}{x^2 - 1} > 0 \iff \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1} > 0 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$D(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \text{ e } \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1} > 0 \right\}.$$

Cuidado!

$$2 > \sqrt{3} \iff \begin{cases} 2 > \sqrt{3} \iff \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 \\ \text{e} \\ -2 < -\sqrt{3} \iff \frac{-2}{\sqrt{3}} < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1}$$

Portanto,

$$D(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \text{ e } \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1} > 0 \right\}.$$

Dito de outro modo, temos:

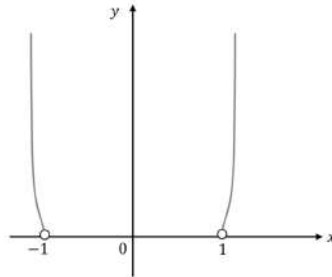
$$D(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} : (x \neq \pm 1) \text{ e } \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} < x < -1 \text{ ou } 1 < x < \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right\}.$$

Portanto,

$$D(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-2}{\sqrt{3}} < x < -1 \text{ ou } 1 < x < \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Agora, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2-1} - 3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4-3x^2}{x^2-1}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4-3x^2}{x^2-1}}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{4-3x^2}}.$$



(ii) $D(g \circ f) \text{ e } g \circ f : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \text{ e } g(x) = \frac{1}{x^2-1}.$

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(f) \text{ e } f(x) \in D(g)\}.$$

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ e } f(x) \neq \pm 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ e } \frac{1}{\sqrt{x-3}} \neq \pm 1\right\} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x-3}} &\neq \pm 1 \iff \sqrt{x-3} \neq 1 \text{ ou } \sqrt{x-3} \neq -1 \\ (\sqrt{x-3})^2 &\neq 1^2 \text{ ou } \sqrt{x-3} \neq -1, \forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \\ |x-3| &\neq 1 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \\ x-3 &\neq 1 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \\ x &\neq 4 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ e } (x \neq 4 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}, x > 3)\}.$$

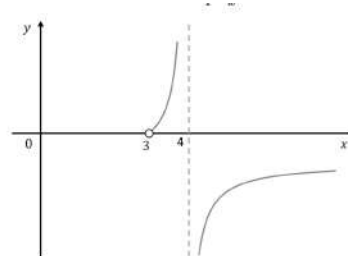
De sorte que:

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ e } x \neq 4\}.$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{1}{[f(x)]^2 - 1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right]^2 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{x-3} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x-3} - 1} = \frac{1}{\frac{4-x}{x-3}} = \frac{x-3}{4-x}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(f(x)) = \frac{x-3}{4-x}.$$



Uma pausa para alguns comentários

Se imaginássemos que poderia achar a composição

$$g(f(x)) = \frac{x-3}{4-x}.$$

para em seguida; obter o domínio $D(g \circ f)$, cometeríamos o erro de achar que o domínio da composta seria

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4\}.$$

Para ilustrar o erro existente, vejamos:

Quem seria $(g \circ f)(-2) = ?$

$$f(-2) = \frac{1}{\sqrt{-2-3}} = \frac{1}{\sqrt{-5}} \notin \mathbb{R},$$

e, portanto, $\nexists (g \circ f)(-2) \nexists = \text{não existe}$

4.3 Tipos Especiais de Funções: Injetora, Sobrejetora e Bijetora

Definição 4.3

Seja X um subconjunto dos reais não-vazio e seja

$f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

(i) Dizemos que: f é injetora, quando:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Ou usando a equivalência tautológica ($p \implies q \iff \sim q \implies \sim p$), temos:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

(ii) Dizemos que f é sobrejetora, quando:

$$\forall y \in CD(f) : \exists x \in D(f) : y = f(x).$$

(Dito de outro modo: f é sobrejetora se não sobra elementos no contra-domínio de f)

(iii) Dizemos que f é bijetora se, e somente se, f é injetora e sobrejetora



Exemplo 4.3

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = 2x + 1.$$

Afirmção 1

f é injetora.

De fato, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ \implies 2x_1 = 2x_2 &\implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmção 2

f é sobrejetora.

Note que:

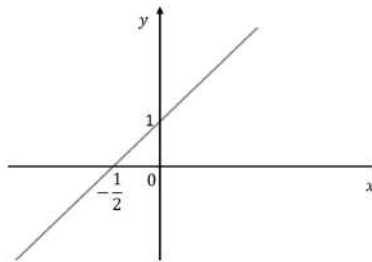
$$y = 2x + 1 \implies 2x = y - 1 \implies x = \frac{y - 1}{2}$$

Com efeito,

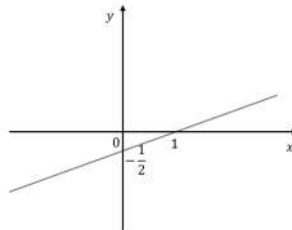
$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R} = CD(f) : \exists \left(x = \frac{y - 1}{2} \right) \in D(f) : \\ f(x) = f\left(\frac{y - 1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y - 1}{2}\right) + 1 = y. \end{aligned}$$

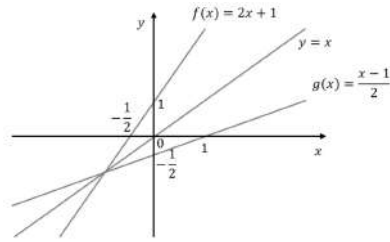
De sorte que: f é sobrejetora. Por conseguinte, vem: f é bijetora. ■

$$f(x) = 2x + 1$$



$$g(x) = \frac{x-1}{2}$$





2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^3$.

Afirmção 1

f é injetora.

De fato,

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) &\implies x_1^3 = x_2^3 \\ \implies x_1^3 - x_2^3 = 0 &\implies (x_1 - x_2) \cdot (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \\ \implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases} &\implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Pois,

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \iff x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1x_2 \iff x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 > 0$$

desde que $x_1 \neq x_2$.

Logo, f é injetora. ■

Afirmção 2

f é sobrejetora.

Note que:

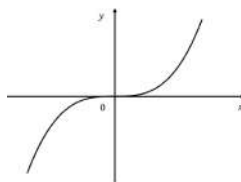
$$y = x^3 \implies x = \sqrt[3]{y}.$$

Com efeito,

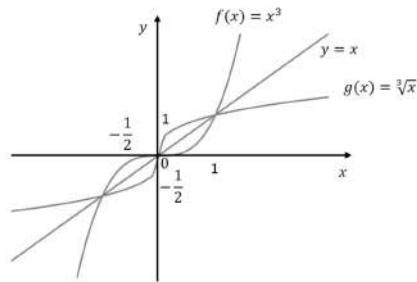
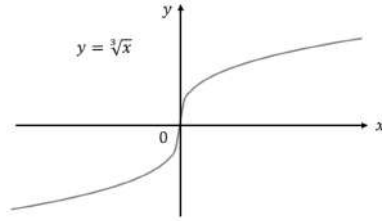
$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R} = CD(f) : \exists x = \sqrt[3]{y} \in D(f) = \mathbb{R} : \\ f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y. \end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora. Por conseguinte, vem: f é bijetora. ■

$f(x) = x^3$



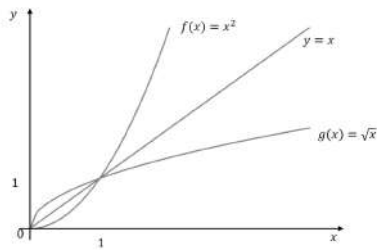
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



3. Seja $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ uma função, definida por:

$$g(x) = \sqrt{x},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.



Afirmção 1

g é injetora.

De fato, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\implies \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\ \implies (\sqrt{x_1})^2 &= (\sqrt{x_2})^2 \implies |x_1| = |x_2| \\ \implies x_1 = x_2, &\text{ visto que } x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, g é injetora. ■

Afirmação 2

g é sobrejetora.

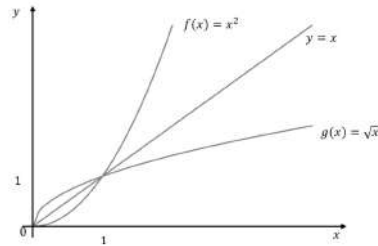
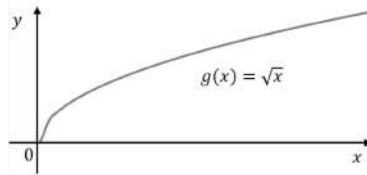
Note que:

$$g(x) = \sqrt{x} \implies x = y^2.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \forall y \in CD(f) : \exists x = y^2 \in D(f) = \mathbb{R} : \\ g(x) = g(y^2) = \sqrt{y^2} = |y| = y, \text{ com } y \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, g é sobrejetora. Por conseguinte, vem: g é bijetora. ■



4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função, definida por:

$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

Prove por definição que: f é bijetora.

Demonstração

Afirmação 1:

f é injetora.

De fato, $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{aligned} u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : f(u_1) = f(u_2) &\implies f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \\ \implies (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2) &\implies \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ \text{e} \\ 2y_1 = 2y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{e} \\ y_1 = y_2 \end{cases} &\implies u_1 = u_2. \end{aligned}$$

De sorte que: f é injetora. ■

Afirmção 2

f é sobrejetora.

Antes de provar vejamos

$$f(x, y) = (x + y, x - y) = (a, b) \implies \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = a + b \\ \mathbf{e} \\ 2y = a - b \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ \mathbf{e} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}.$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 = CD(f) : \exists (x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \right) \in \mathbb{R}^2 = D(f) :$$

$$f(x, y) = f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = (a, b).$$

Dito de outra forma, f é sobrejetora e, portanto: bijetora. ■

5. Seja $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função, dada por:

$$f(p(x)) = (p(0), p(1))$$

Prove por definição que: f é bijetora.

Antes de provar; vamos olhar de pertinho, como são os elementos do domínio desta função f .

$$[p(x) = ax + b] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \implies \begin{cases} p(0) = b \\ p(1) = a + b. \end{cases}$$

Assim, a função $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser escrita por:

$$f(ax + b) = (b, a + b)$$

Demonstração

Afirmção 1:

f é injetora.

De fato,

$$\begin{aligned} \forall p_1(x) = a_1x + b_1, p_2(x) = a_2x + b_2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : f(p_1(x)) &= f(p_2(x)) \\ \implies f(a_1x + b_1) = f(a_2x + b_2) &\implies (b_1, a_1 + b_1) = (b_2, a_2 + b_2) \\ \implies \begin{cases} b_1 = b_2 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \end{cases} &\implies \begin{cases} b_1 = b_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \implies p_1(x) = p_2(x). \end{aligned}$$

De sorte que: f é injetora. ■

Afirmção 2

f é sobrejetora.

Antes de provar vejamos

$$\begin{aligned} f(p_0(x)) &= f(a_0x + b_0) = (b_0, a_0 + b_0) = (k_1, k_2) \\ \implies \begin{cases} b_0 = k_1 \\ a_0 + b_0 = k_2 \end{cases} &\implies \begin{cases} b_0 = k_1 \\ a_0 = k_2 - k_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 = CD(f) : \exists p_0(x) = a_0x + b_0 = (k_2 - k_1)x + k_1 \in D(f) :$$

$$f(p_0(x)) = f[(k_2 - k_1)x + k_1] = (k_1, (k_2 - k_1) + k_1) = (k_1, k_2).$$

Portanto, f é sobrejetora, por conseguinte: bijetora. ■

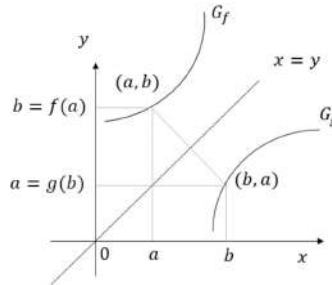


Observação

Posteriormente, funções dadas nos exemplos 4 e 5, serão vistas no curso de Álgebra Linear em detalhes.

Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função injetora:



Fatos

1.

$$(a, b) \in G(f) \iff (b, a) \in G(g).$$

Dito de outro modo, temos:

$$\begin{aligned} (a, b) \in G(f) &\iff b = f(a) \\ &\iff g(b) = g[f(a)] = a \\ &\iff g(b) = a \\ &\iff (b, a) \in G(g) = G(f^{-1}). \end{aligned}$$

2. Toda função injetora estritamente crescente (ou decrescente) no seu domínio, admite inversas.

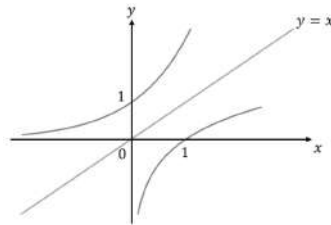
Definição 4.4

Seja $g : Y \rightarrow X$ uma função. Dizemos que: g é a inversa de $f : X \rightarrow Y$, se:

$$(i) \quad (g \circ f)(x) = x, \forall x \in D(f) \quad (ii) \quad (f \circ g)(y) = y, \forall y \in D(g)$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & g \circ f & X \end{array}$$



Observação

(i)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & Y \end{array}$$

(ii)

Cuidado!

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

(iii)

Notação

g é a função inversa de f

$$g = f^{-1}.$$

(iv) $g : Y \rightarrow X$ é a função inversa de $f : X \rightarrow Y$

Afirmção 1

$f : X \rightarrow Y$ é injetora.

De fato,

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \implies x_1 = x_2$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmção 2

f é sobrejetora.

Com efeito,

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : x = g(y) \implies f(x) = f(g(y)) = y.$$

De sorte que: f é sobrejetora. ■

Consequentemente, vem: f é bijetora.

Conclusão

$$f : X \longrightarrow Y \text{ invertível} \iff f \text{ é bijetora.}$$



Observação

Alguns textos do Ensino Médio chama invertível de inversível.

Exemplo 4.4

1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = -2x + 1.$$

Determine $g = f^{-1}$

Solução

Com efeito,

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = -2g(x) + 1 = x.$$

Logo,

$$-2g(x) + 1 = x \implies -2g(x) = x - 1 \implies 2g(x) = -x + 1 \implies g(x) = f^{-1}(x) = \frac{-x + 1}{2}.$$

Observe que:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{-f(x) + 1}{2} = \frac{-[-2x + 1] + 1}{2} = \frac{2x - 1 + 1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

e

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = -2f^{-1}(x) + 1 = -2 \left[\frac{-x + 1}{2} \right] + 1 = \frac{2x - 2 + 2}{2} = x$$

2. Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função, definida por:

$$f(x) = \sqrt{x},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Determine $g = f^{-1}$.

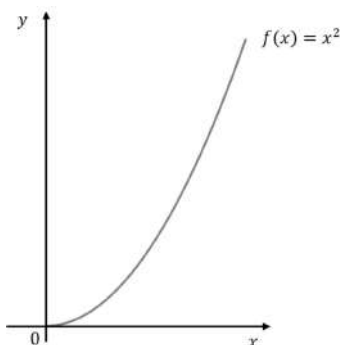
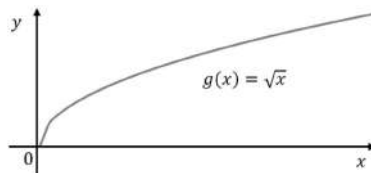
Solução

De fato, $g = f^{-1} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = x \implies \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 = x^2 \implies |g(x)| = x^2 \geq 0.$$

Portanto,

$$g(x) = f^{-1}(x) = x^2.$$



Vale ressaltar que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

e

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = [f(x)]^2 = (\sqrt{x})^2 = |x| = x.$$

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^3.$$

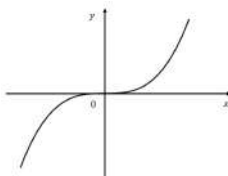
Solução

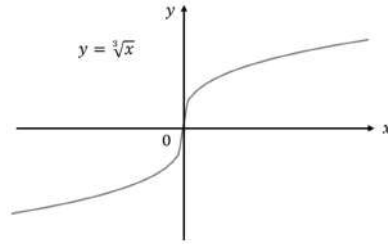
De fato,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 = x \implies g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

De sorte que:

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$





Vale salientar que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = [f^{-1}(x)]^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

e

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

4. Seja $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \ln x.$$

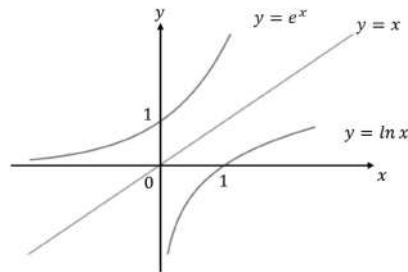
Solução

De fato, $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g = f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln[g(x)] = x \implies g(x) = e^x.$$

De sorte que:

$$g(x) = f^{-1}(x) = e^x.$$



Observação

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \ln[f^{-1}(x)] = \ln(e^x) = x \ln e = x.$$

$$\ln e = 1$$

e

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\ln x} = x.$$

5. Seja $f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$, definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x-2}.$$

Pede-se:

(i) $g = f^{-1}$

(ii) Esboço dos gráficos de f e f^{-1} .

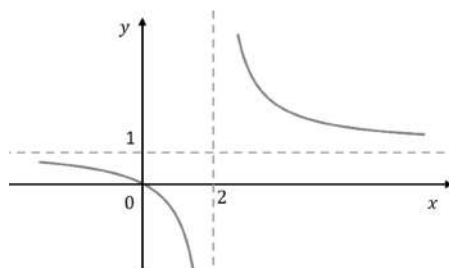
Solução

(i) Por definição, temos:

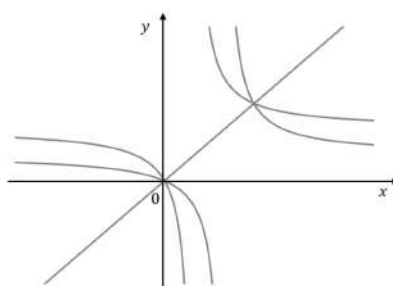
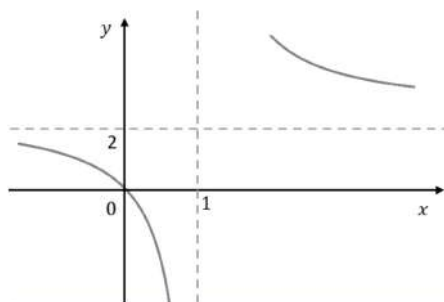
$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{g(x)}{g(x)-2} = x \implies g(x) = xg(x) - 2x \\ \implies g(x) - xg(x) &= -2x \implies g(x)[1-x] = -2x \\ \implies g(x) &= f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}. \end{aligned}$$

(ii) Esboço dos gráficos de f e $g = f^{-1}$.

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$



$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{2x}{x-1}$$



6. Seja $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ uma função, definida por:

$$f(x) = \sqrt{x-1},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Afirmção 1:

f é injetora.

De fato,

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) &\implies \sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1} \\ \implies (\sqrt{x_1 - 1})^2 &= (\sqrt{x_2 - 1})^2 \implies |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \\ \implies x_1 - 1 = x_2 - 1 &\implies x_1 = x_2, \text{ visto que } x_1, x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmção 2:

f é sobrejetora.

Note que:

$$y = \sqrt{x - 1} \implies x - 1 = y^2 \implies x = 1 + y^2.$$

Com efeito,

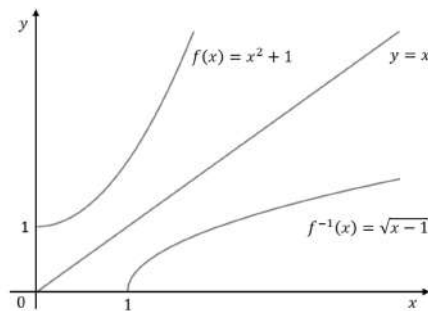
$$\begin{aligned} \forall y \in CD(f) = \mathbb{B} : \exists x = 1 + y^2 \in D(f) = \mathbb{A} : \\ f(x) = f(1 + y^2) = \sqrt{1 + y^2 - 1} = |y| = y. \end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora. Por conseguinte, vem: f é bijetora. ■

Agora, a função inversa da função f , será dada por:

$$g = f^{-1} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = x \implies |g(x) - 1| = x^2 \implies g(x) = x^2 + 1$$



Uma pausa para alguns comentários

Em alguns textos do Ensino Médio, achar a inversa de uma função usa-se "trocar x por y e expressa y como função de x ". Parece mágica da forma que se procede. A título ilustrativo, escolha:

$$f(x) = x^2.$$

Vejam $y = x^2$, trocando x por y , vem:

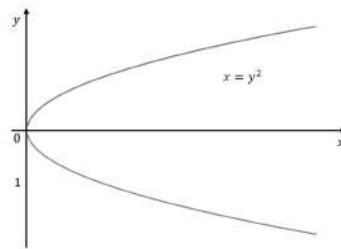
$$y = x^2 \implies x = y^2 \implies y = \pm\sqrt{x}.$$

e agora, expressando y como função de x , quem é a função inversa?:

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \\ \text{ou} \\ g(x) = -\sqrt{x} \end{cases} .$$

Vale ressaltar que: a equação dada não é uma função

$$x = y^2.$$



Neste caso, o esboço gráfico *nem função representa*. (Um elemento do domínio $x > 0$ tem duas imagens)

4.4 Função Exponencial

Definição 4.5 (continua 4.6)

Seja a um número real, tal que: $0 < a \neq 1$ e seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função.

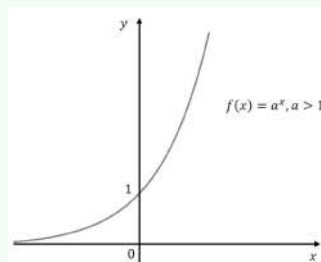
Dizemos que f é exponencial de base a se:

$$f(x) = a^x$$

e satisfaz as seguintes condições:

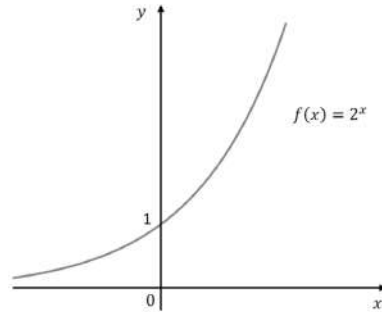
- 1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- 2) $a^1 = a$
- 3) $a > 1$: f é crescente: $x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2}$

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies x_2 - x_1 > 0 \implies a^{x_2 - x_1} > 1 \\ &\implies \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \implies a^{x_1} < a^{x_2} \implies f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

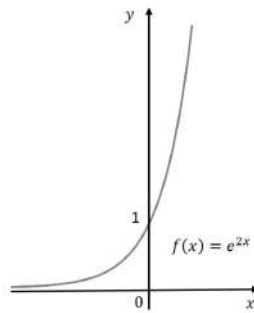


Exemplo 4.5

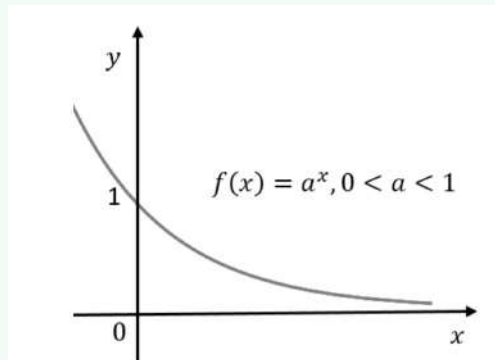
(A) $f(x) = 2^x$



(B) $f(x) = e^{2x}$

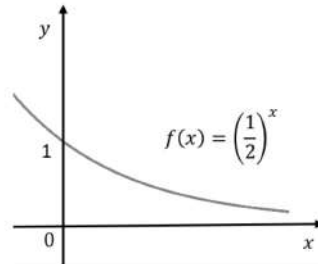
**Definição 4.6 (continuação de 4.5)**4) $0 < a < 1$: f é decrescente: $x_1 < x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2}$

$$\begin{aligned}
 0 < a < 1 &\implies \frac{1}{a} > 1 \text{ e } x_1 < x_2 \implies x_2 - x_1 > 0 \\
 &\implies \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2 - x_1} > 1 \implies a^{x_1 - x_2} > 1 \implies \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \\
 &\implies a^{x_1} > a^{x_2} \implies f(x_1) > f(x_2).
 \end{aligned}$$

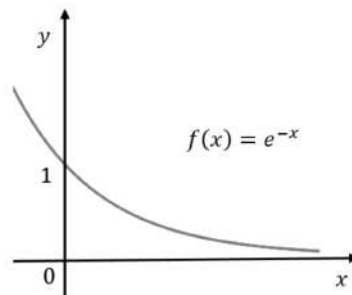


Exemplo 4.6

$$(A) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



$$(B) f(x) = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$$

**Uma pausa para alguns questionamentos e comentários:**

1. O porquê das restrições a base a ?

Uma resposta comum de alguns: queremos que a função exponencial admita inversa. Ora, estamos definindo uma função, as restrições devem bastar em si mesma. Vejamos de fato uma explicação plausível. A saber:

(A). Na definição o que aconteceria se $a = 1$? A função é constante.

(B). Se $a < 0$, ilustrativamente, escolha $a = -2$, então,

$$f(x) = (-2)^x.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \\ &\text{e} \\ f\left(\frac{2}{4}\right) &= (-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2} \\ &= \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que: f não define uma função.

2. f é injetora:

Demonstração

Basta notar que:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies a^{x_1} = a^{x_2} \implies \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = 1 \\ &\implies a^{x_1 - x_2} = 1, \text{ com } a > 0 \\ &\implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

3. f é sobrejetora: $y \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R} : y = a^x$, isto é, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$.
De sorte que: f é bijetora. (f admite inversa)

4. Vale a pena ressaltar que: se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

então, não pode assumir o valor 0, salvo no caso de $f(x) \equiv 0$.

Demonstração

De fato,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

Se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que: $f(x_0) = 0$, então, segue-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f[(x-x_0) + x_0] \\ &= f(x-x_0) \cdot f(x_0) \\ &= f(x-x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

5. Se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é identicamente nula e satisfaz

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \iff a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

então, f é necessariamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Com efeito,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Ou ainda,

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dito de outro modo, à luz dessa propriedade

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

tanto faz dizer que o contra-domínio de f é \mathbb{R} :

$$CD(f) = \mathbb{R} \text{ como } CD(f) = \mathbb{R}^+.$$

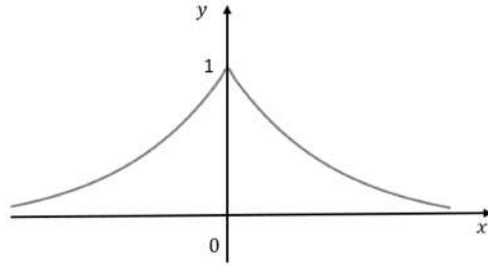
A vantagem de tomar o contra-domínio de f como \mathbb{R}^+ reside na sobrejetividade de f . ■

Exemplo 4.7

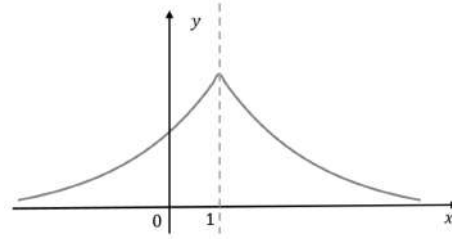
1. (i) $f(x) = 2^{-|x-1|}$ (ii) $f(x) = 2^{-|x+1|}$

(i)

$$y_1 = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^{-(-x)} & x < 0 \end{cases} \iff y_1 = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^x & x < 0 \end{cases}$$



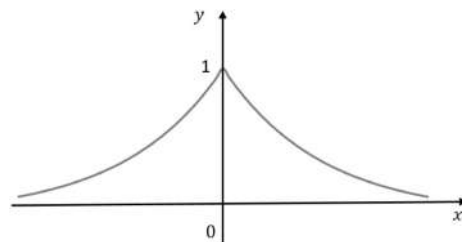
$y_2 = 2^{-|x-1|}$ este gráfico é o mesmo do gráfico anterior, destacando a translação de uma unidade à direita

**Destacando**

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ e \\ \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 1\} \end{cases}$$

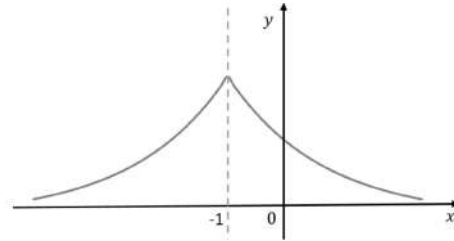
(ii) $f(x) = 2^{-|x+1|}$

$$y_1 = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^{-(-x)} & x < 0 \end{cases} \iff y_1 = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^x & x < 0 \end{cases}$$



$$y_2 = f(x) = 2^{-|x+1|}$$

$y_2 = 2^{-|x+1|}$ este gráfico foi obtido de $y_1 = 2^{-|x|}$, sendo trasladado uma unidade à esquerda.



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ \text{e} \\ \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 1\} \end{cases}$$

4.5 Função Logarítmica

Definição 4.7

Seja a um número real, tal que: $0 < a \neq 1$ e seja $g = f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é logaritmo de x na base a se:

$$g(x) = \log_a x$$

e satisfaz as seguintes condições:

A função inversa da exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ descrita por

$$f(x) = a^x$$

de base a é a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = f^{-1}(x) = \log_a x.$$



Consequências da definição

$$g[f(x)] = \log_a [a^x] = x \iff \log_a [a^x] = x$$

e

$$f[g(x)] = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x \iff a^{\log_a x} = x.$$

Afirmação:

$$0 < a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 : \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

Demonstração

Sejam $w = \log_a x^\alpha$ e $y = \log_a x$, então, queremos mostrar que:

$$w = \alpha y.$$

Vejam,

$$\begin{cases} w = \log_a x^\alpha \\ e \\ y = \log_a x \end{cases} \iff \begin{cases} a^w = x^\alpha \\ e \\ a^y = x \end{cases} \iff a^w = (a^y)^\alpha.$$

Daí, segue-se que:

$$a^w = (a^y)^\alpha = a^{\alpha y} \iff w = \alpha y.$$

Portanto,

$$w = \alpha y \iff \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

■

1)

$$\begin{aligned} (i) \quad y = a^x &\iff \log_a (y) = \log_a (a^x) = x \\ (ii) \quad \log_a x = y &\iff a^y = x \iff a^{\log_a x} = x. \end{aligned}$$

■

2)

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 \iff a^0 = 1. \\ e \\ \log_a a &= 1 \iff a^1 = a \iff y = 1. \end{aligned}$$

■

3)

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Ou ainda,

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

4) f é uma função injetora:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

5) f é uma função sobrejetora:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = a^y \in \mathbb{R}^+ : f(a^y) = \log_a(a^y) = y$$

6) Mudança de base para logaritmos: $\forall a, b, x \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \neq 1$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Sejam $w = \log_b x$, $y = \log_a x$ e $k = \log_a b$, então, queremos mostrar que:

$$w = \frac{y}{k} \iff y = wk.$$

Demonstração

1º Modo:

$$\text{Se } w = \log_b x, y = \log_a x \text{ e } k = \log_a b, \text{ então, tem-se: } \begin{cases} x = b^w \\ x = a^y \\ e \\ b = a^k \end{cases} \implies \begin{cases} a^y = b^w \\ e \\ b = a^k \end{cases}.$$

Daí, obtemos:

$$a^y = (a^k)^w = a^{kw}.$$

Por conseguinte, vem:

$$y = kw \iff w = \frac{y}{k}.$$

Logo,

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

2º Modo:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Seja $\log_b x = y$, então temos: $x = b^y$. Assim,

$$\log_a x = \log_a(b^y) = y \cdot \log_a b \iff y = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

De sorte que:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

7) Sejam $x_1, x_2, a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, então tem-se:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \\ (ii) \quad & \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2). \end{aligned}$$

Demonstração

(i) Sejam $\log_a(x_1 x_2) = w$, $\log_a(x_1) = y_1$ e $\log_a(x_2) = y_2$, então, queremos mostrar que:

$$w = y_1 + y_2.$$

Vejamos,

$$\begin{cases} \log_a(x_1 x_2) = w \\ \log_a(x_1) = y_1 \\ \text{e} \\ \log_a(x_2) = y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 x_2 = a^w \\ x_1 = a^{y_1} \\ \text{e} \\ x_2 = a^{y_2} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 x_2 = a^w \\ \text{e} \\ x_1 x_2 = a^{y_1} a^{y_2} \end{cases}$$

Decorre daí que:

$$a^w = a^{y_1 + y_2}$$

Portanto,

$$w = y_1 + y_2.$$

Ou ainda,

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2).$$

(ii) 1º Modo:

Sejam $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = w$, $\log_a(x_1) = y_1$ e $\log_a(x_2) = y_2$, então, queremos mostrar que:

$$w = y_1 - y_2.$$

De fato,

$$\begin{cases} \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = w \\ \log_a(x_1) = y_1 \\ \text{e} \\ \log_a(x_2) = y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = a^w \\ x_1 = a^{y_1} \\ \text{e} \\ x_2 = a^{y_2} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = a^w \\ \text{e} \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}, \end{cases}$$

e, por conseguinte, vem:

$$a^w = a^{y_1 - y_2} \iff w = y_1 - y_2.$$

2º Modo:

Bastaria notar que:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1 x_2^{-1}) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2^{-1}).$$

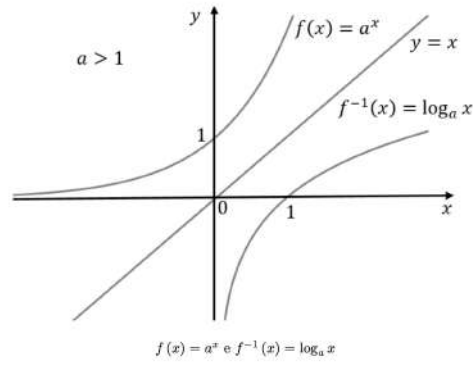
Agora, como $\log_a(x_2^{-1}) = -\log_a(x_2)$, segue-se:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1 x_2^{-1}) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2).$$

8) 1º Caso: $a > 1$: f é crescente:

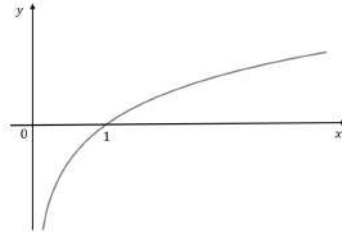
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

$$f(x) = a^x \text{ e } f^{-1}(x) = \log_a x$$

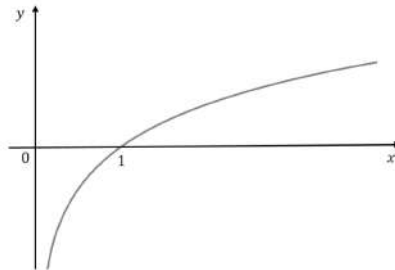


Exemplo 4.8

(A) $f(x) = \log_2 x$

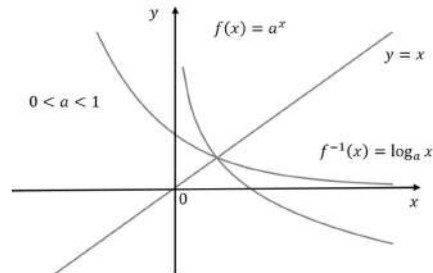


(B) $f(x) = \ln x = \log_e x$



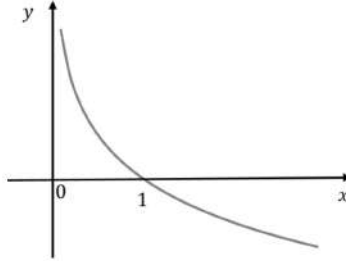
2º Caso: $0 < a < 1$: f é decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

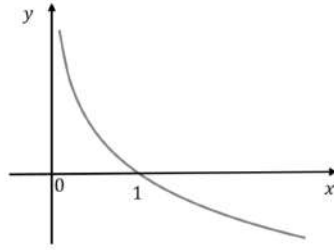


Exemplo 4.9

$$(A) f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



$$(B) f(x) = -\ln x$$

**Observação**

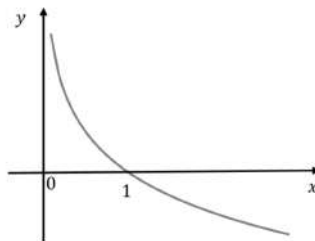
Usando a mudança para base a do logaritmo dado.

Sejam $x, a > 0, a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$, então, temos:

$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k} \cdot \log_a x, \text{ pois, } \log_a a = 1.$$

A título ilustrativo, tome como exemplo:

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log_e x}{\log_e (\frac{1}{e})} = \frac{\ln x}{\ln(e^{-1})} = \frac{\ln x}{-\ln e} = -\ln x \text{ pois, } \ln e = 1.$$

**Problema 4.1**

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$(i) e^{2x} - 2 \cdot e^x + 1 = 0 \quad (ii) \ln(x^2 - 1) = 1 \quad (iii) 2^{|x-4|} = 32.$$

Solução

(i) Fazemos $t = e^x$, então a equação toma a forma:

$$\begin{aligned}(e^x)^2 - 2 \cdot e^x + 1 &= 0 \iff t^2 - 2t + 1 = 0 \\ \implies t &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \\ \implies t &= \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

Agora, voltando e substituindo o valor de $t = 1$, obtemos:

$$t = e^x = 1 \implies e^x = e^0 \implies x = 0.$$

(ii)

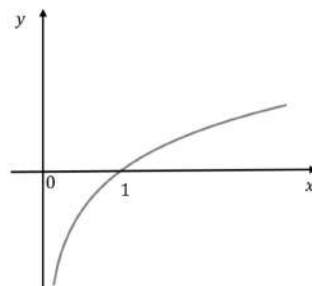
$$\begin{aligned}\ln(x^2 - 1) &= 1 \iff x^2 - 1 = e^1 \iff x^2 = e + 1 \\ \implies x &= \pm\sqrt{e + 1}.\end{aligned}$$

(iii)

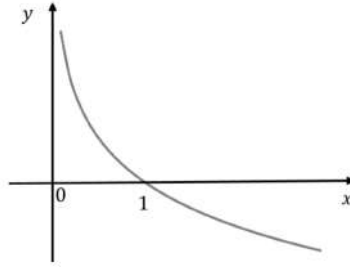
$$\begin{aligned}2^{|x-4|} &= 32 \iff 2^{|x-4|} = 2^5 \\ \implies |x-4| &= 5 \implies \begin{cases} x-4 = 5 \\ \text{ou} \\ x-4 = -5 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} x = 5+4 \\ \text{ou} \\ x = -5+4 \end{cases} &\implies \begin{cases} x = 9 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Exemplo 4.10

1. (i) $f(x) = \ln x$



$$(ii) f(x) = -\ln x$$



Observe que

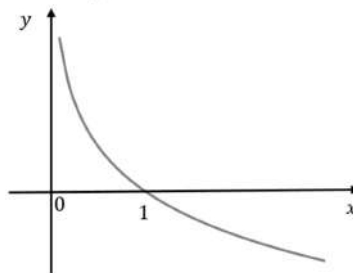
Usando a mudança para base a do logaritmo dado, temos:

$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k} \cdot \log_a x, \text{ pois, } \log_a a = 1,$$

com $x, a > 0$ e $k \in \mathbb{R}, a \neq 1$.

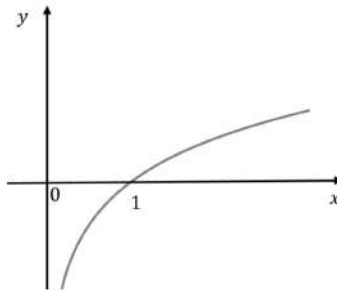
A título ilustrativo, tome como exemplo:

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log_e x}{\log_e (\frac{1}{e})} = \frac{\ln x}{\ln(e^{-1})} = \frac{\ln x}{-\ln e} = -\ln x \text{ pois, } \ln e = 1.$$

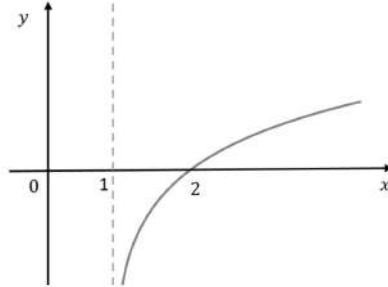


$$2. f(x) = |\log_{10}(x-1)|$$

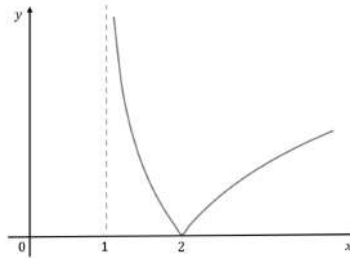
$$y_1 = \log_{10}(x)$$



$$(ii) y_2 = \log_{10}(x - 1)$$



$$(iii) y_3 = |\log_{10}(x - 1)|$$

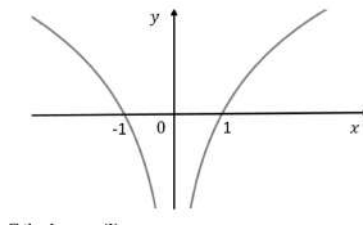


Destacando

$$\text{Domínio de } f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

$$\text{Imagem de } f : \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}.$$

$$3. f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$



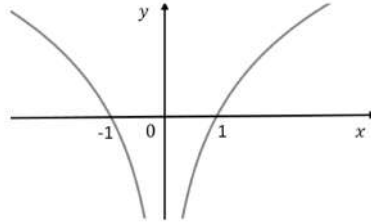
Cálculos auxiliares

$$f(x) = 0 \iff \ln|x| = 0 \iff \ln_e|x| = 0 \iff |x| = e^0 = 1 \implies \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

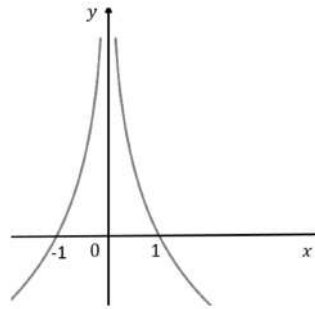
São os valores que cortam o eixo x (ou zero da função f)

$$4. f(x) = |2 - \ln|x||$$

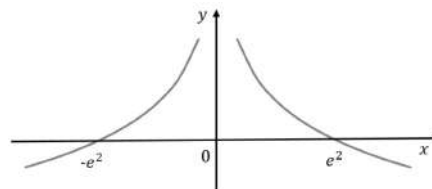
$$y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$



$y_2 = -\ln|x|$, este gráfico, foi obtido de $y_1 = \ln|x|$ fazendo uma **reflexão** em torno do eixo x , ou seja, a parte positiva ficou negativa e a parte negativa ficou positiva, graficamente, temos:



$y_3 = 2 - \ln|x|$, este gráfico, foi obtido do gráfico anterior $y_1 = -\ln|x|$ transladando duas unidades para cima, graficamente, temos:



Cálculos auxiliares

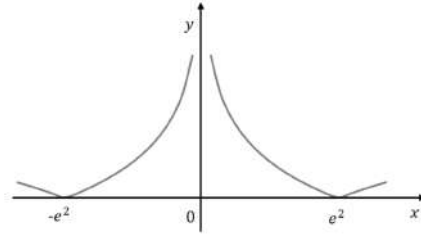
Determinando os valores que cortam o eixo x

$$f(x) = 0 \iff 2 - \ln|x| = 0 \iff \ln|x| = 2 \iff \ln_e|x| = 2 \iff$$

$$|x| = e^2 \implies \begin{cases} x = e^2 \\ \text{ou} \\ x = -e^2. \end{cases}$$

São os valores que cortam o eixo x (ou zero da função f).

E, finalmente, obtendo o gráfico de $f(x) = |2 - \ln|x||$, vale destacar que: este gráfico foi obtido do anterior, refletindo a parte negativa em torno do eixo x , ou ainda, a parte positiva ou nula permanece a mesma e a parte negativa girou em torno do eixo x e ficou positiva.

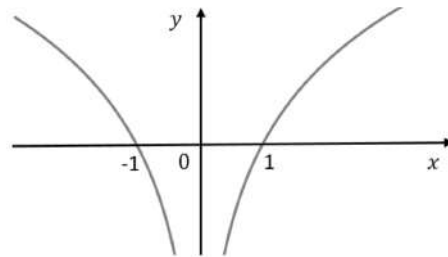


Destacando:

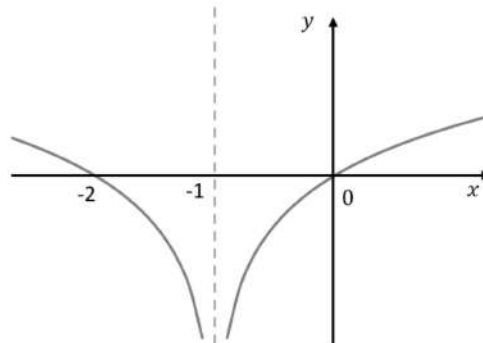
$$\begin{cases} D(f) = \{y \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\ \quad \quad \quad e \\ \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}. \end{cases}$$

5. $f(x) = \ln|x+1|$

$$(i) y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$



(ii) $y_2 = \ln|x+1|$, este gráfico é obtido de $y_1 = \ln|x|$ anterior deslocando ou transladando uma unidade à esquerda

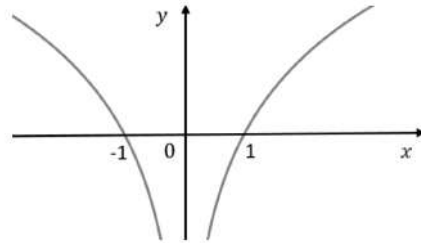


Destacando:

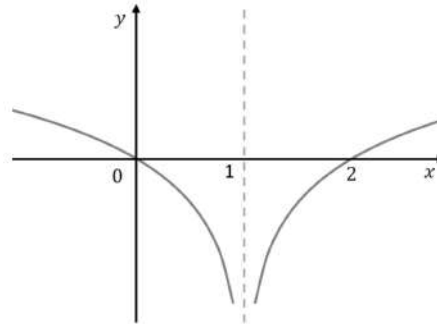
$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \\ \quad \quad \quad e \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$6 \quad f(x) = \ln|x - 1|$$

$$(i) \quad y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$



$y_2 = \ln|x - 1|$, este gráfico é obtido de $y_1 = \ln|x|$ deslocando ou transladando uma unidade à direita



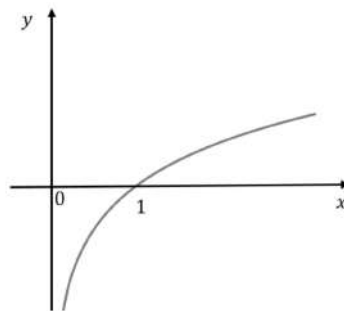
Destacando:

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} - \{1\} \\ \quad \quad \quad e \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

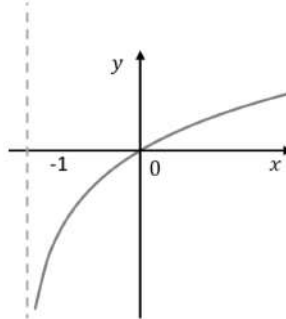
■

$$7. \quad f(x) = |\ln(x + 1)|$$

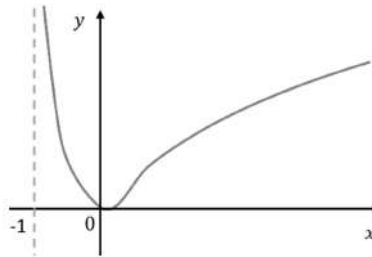
$$y_1 = \ln x$$



$y_2 = \ln(x + 1)$, este gráfico é obtido do gráfico anterior trasladando uma unidade à esquerda.



$y_3 = |\ln(x + 1)|$, este gráfico é obtido do gráfico anterior, fazendo a reflexão em torno do eixo x a parte positiva ou nula, permanece a mesma, a parte negativa refletida em torno do eixo x fica positiva.



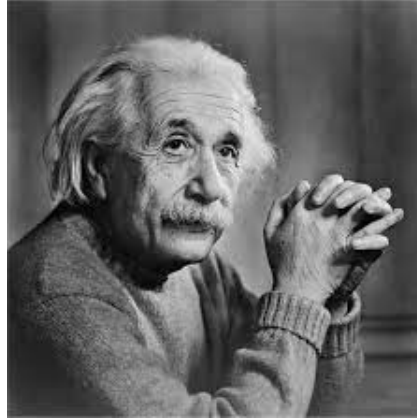
Destacando:

$$\begin{cases} D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} \\ \text{e} \\ \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}. \end{cases}$$



Capítulo 5

”O princípio criativo reside na matemática.”



Albert Einstein (1879 – 1955)

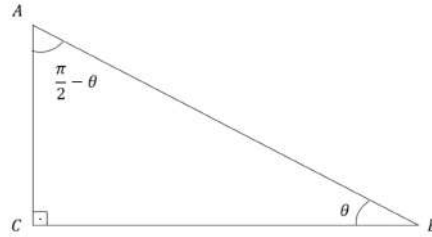
”Defender que a tecnologia desvirtua a Matemática (ou o seu ensino), é como defender que o uso de pincéis desvirtua a Pintura.”

Neste Capítulo, vamos abordar trigonometria no triângulo retângulo, funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, esboços gráficos das funções um período fundamental; outros gráficos trigonométricos: usando translações e reflexões de eixos. Finalmente, as funções trigonométricas inversas: arcosseno, arcocosseno, arctangente, arcocotangente, arcsecante e arccossecante e seus respectivos gráficos, calculando alguns arcos particulares como exercícios.

5.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

Tabela dos Ângulos Básicos (Notáveis)

	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Fatos

F_1) É fácil ver:

$$(i) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \sin \theta \quad (ii) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \cos \theta$$

$$(iii) \operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (iv) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}{\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ (ii) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \\ (iii) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{array} \right.$$

(Os nomes cosseno $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ é o complementar do seno de θ e seno $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ é o complementar do cosseno de θ)

F_2) No triângulo $\triangle ACB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{CB})^2 + (\overline{AC})^2.$$

Por conseguinte, vem:

$$1 = \frac{(\overline{AB})^2}{(\overline{AB})^2} = \left(\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2.$$

Como $\cos \theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$ e $\sin \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, daí obtém-se:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$$

Definição 5.1

(A) Secante do ângulo θ :

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \cos \theta \neq 0$$

(B) Cossecante do ângulo θ :

$$\operatorname{cossc} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \sin \theta \neq 0$$

(C) Tangente do ângulo θ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cos \theta \neq 0$$

(D) Cotangente do ângulo θ :

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \sin \theta \neq 0$$



Proposição 5.1

Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(i) \quad \sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta, \quad \cos \theta \neq 0 \qquad (ii) \quad \operatorname{coss}c^2 \theta = 1 + \operatorname{cotg}^2 \theta, \quad \sin \theta \neq 0$$

Demonstração

$$(i) \quad \sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$$

De fato, dividindo a identidade fundamental $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ por $\cos^2 \theta \neq 0$, obtemos:

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

Logo,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta.$$

$$(ii) \quad \operatorname{coss}c^2 \theta = 1 + \operatorname{cotg}^2 \theta$$

Procedendo de forma análoga, dividindo a identidade $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ por $\sin^2 \theta \neq 0$, vem:

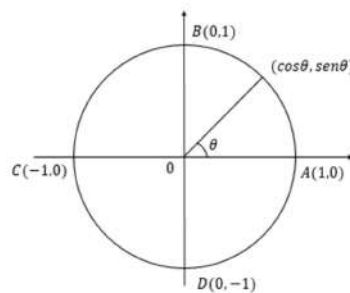
$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

De sorte que:

$$\operatorname{coss}c^2 \theta = 1 + \operatorname{cotg}^2 \theta.$$

Circunferência Unitária:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \text{onde: } \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}.$$



Casos Particulares:

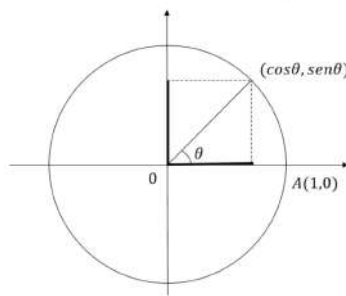
$$\begin{array}{lll}
 1. \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. & 2. \begin{cases} \cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0 \end{cases} & 3. \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \\
 4. \begin{cases} \cos(\pi) = -1 \\ \sin(\pi) = 0 \end{cases} & 5. \begin{cases} \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \end{cases} & 6. \begin{cases} \cos(2\pi) = 1 \\ \sin(2\pi) = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Sinais do Cosseno e Seno na Circunferência Unitária:

1º caso:

A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ

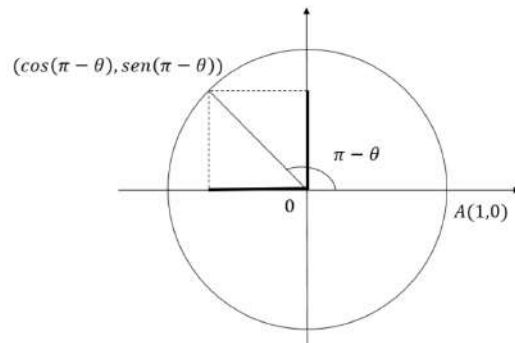
e sobre y a medida do seno de θ . Assim, obtemos:
$$\begin{cases} x = \cos \theta > 0 \\ y = \sin \theta > 0 \end{cases}$$



2º caso:

A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ e sobre y

a medida do seno de θ . Assim, obtemos:
$$\begin{cases} x = \cos \theta < 0 \\ y = \sin \theta > 0 \end{cases}$$



Vale ressaltar:

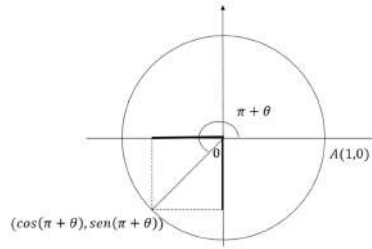
$$(i) \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad (ii) \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

3º caso:

Procedendo de forma análoga, temos:

A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ e sobre y

a medida do seno de θ . Assim, obtemos:
$$\begin{cases} x = \cos \theta < 0 \\ y = \sin \theta < 0 \end{cases}$$



Destacando que:

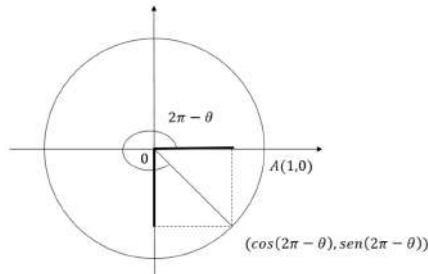
$$(i) \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \quad (ii) \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

4º caso:

Procedendo de forma análoga, temos:

A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ e sobre y

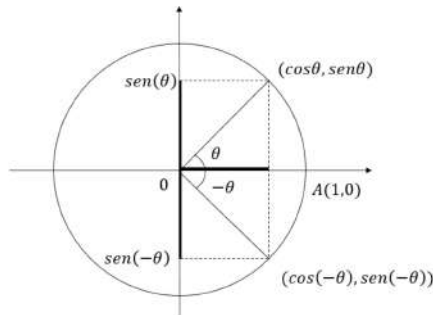
a medida do seno de θ . Assim, obtemos:
$$\begin{cases} x = \cos \theta > 0 \\ y = \sin \theta < 0 \end{cases}$$



Destacando que:

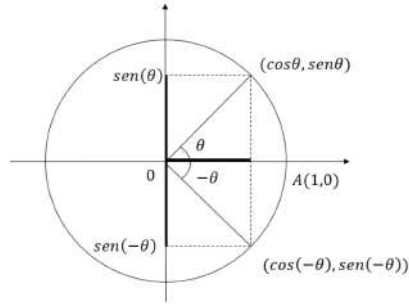
$$(i) \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta \quad (ii) \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$$

5. Não esqueça!



(i) $\cos(-\theta) = \cos \theta$ (ii) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

6. **Consequências**

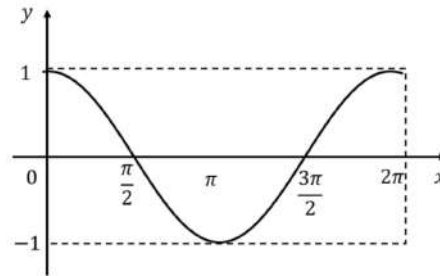


(i) $\sec(-\theta) = \sec \theta$ (ii) $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
 (iii) $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg} \theta$ (iv) $\operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg} \theta$

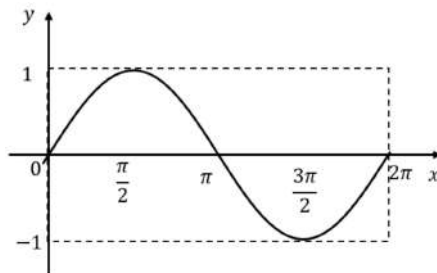
5.1.1 **Esboço dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno em período fundamental 2π**

$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ e $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

1. A função *cosseno* $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \cos x$



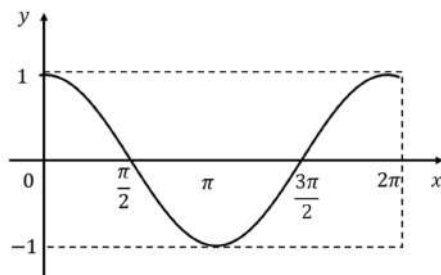
2. A função *seno* $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \sin x$



5.1.2 Esboço dos gráficos das funções trigonométricas

1. A função *coosseno* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \cos x$$

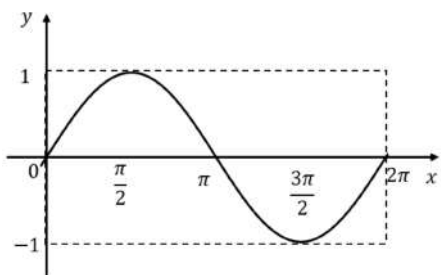


Destacamos

- (i) Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$,
- (ii) Imagem de $f : -1 \leq \cos x \leq 1 \implies \text{Im}(f) = [-1, 1]$ e
- (iii) Período de $f : p(f) = 2\pi$.

2. A função *seno* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sin x$$



Destacamos:

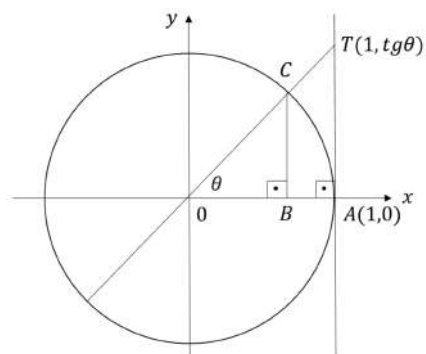
- (i) Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$,
- (ii) Imagem de $f : -1 \leq \sin x \leq 1 \implies \text{Im}(f) = [-1, 1]$ e
- (iii) Período de $f : p(f) = 2\pi$.

A seguir, consideremos os triângulos $\triangle OBC$ e $\triangle OAT$ são semelhantes pelo caso *L.A.L.* (lado, ângulo e lado)

Daí, obtemos:

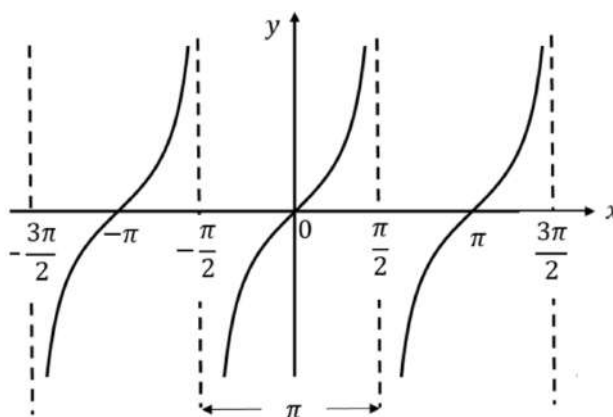
$$\begin{aligned} \triangle OBC &\sim \triangle OAT \implies \frac{\overline{AT}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \iff \frac{\overline{AT}}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \\ \iff AT &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta. \end{aligned}$$

Veja figura a seguir:



3. A função *tangente* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



Destacando

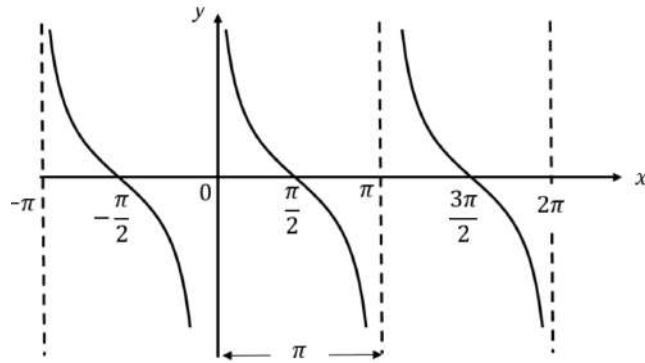
(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ e

(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

4. A função *cotangente* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \cotg x.$$



Destacando

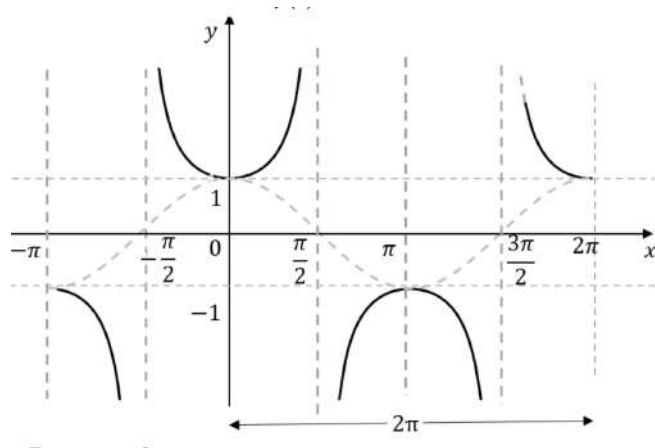
(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) Imagem de $f : \text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e

(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

5. A função *secante* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sec x.$$



Destacando

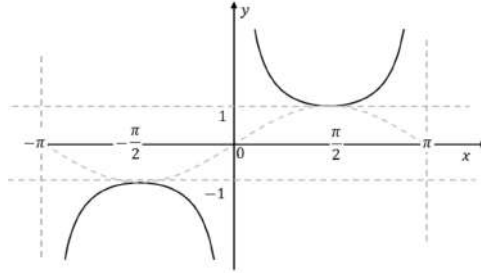
(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) Imagem de $f : \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e

(iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

6. A função *cossecante* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{cossec} x.$$



Destacando

- (i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
- (ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
- (iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

5.1.3 Período de cada Função Trigonométrica dada

1.

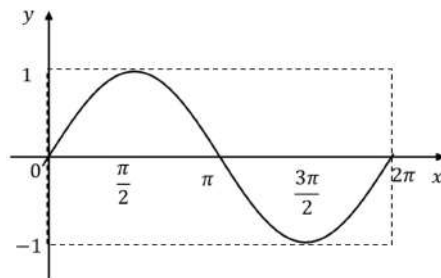
$$f(x) = \sin(kx + b), k > 0 : p(f) = \frac{2\pi}{k}$$

Exemplo 5.1

A. $f(x) = \sin(2x)$

(i)

$$y_1 = \sin x, p(y_1) = 2\pi$$



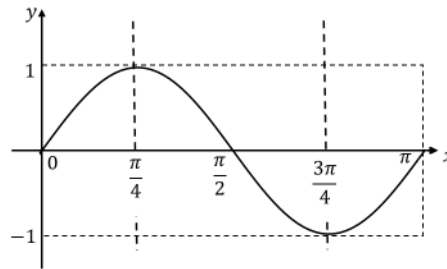
Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \text{Im}(f) = [-1, 1] \end{cases}$$

(ii)

$$y_2 = \sin(2x), \quad p(y_2) = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

O esboço do gráfico foi obtido do anterior, com cada ponto do gráfico de $y_1 = \sin x$ foi dividido por 2.

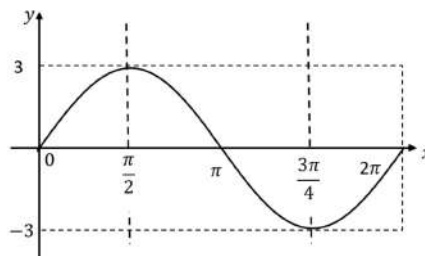
**Destacando**

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = \pi \\ \text{Im}(f) = [-1, 1] \end{cases}$$

B. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(i)

$$y_1 = 3 \sin x, \quad p(y_1) = 2\pi$$

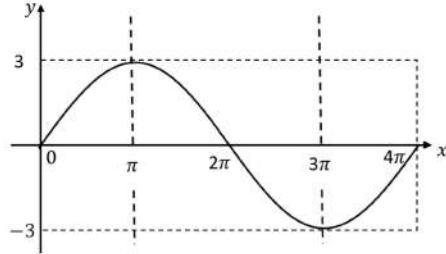
**Destacando**

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \text{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

(ii)

$$y_2 = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right), \quad p(y_1) = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

O esboço deste gráfico, foi obtido, onde: cada ponto do gráfico de $y_1 = 3 \sin x$ foi multiplicado por 2.



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 4\pi \\ \text{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

2.

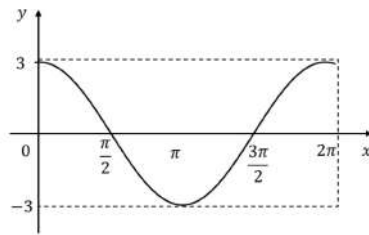
$$f(x) = \cos(kx + b), \quad k > 0 : p(f) = \frac{2\pi}{k}$$

Exemplo 5.2

A. $f(x) = 3 \cos(4x)$

(i)

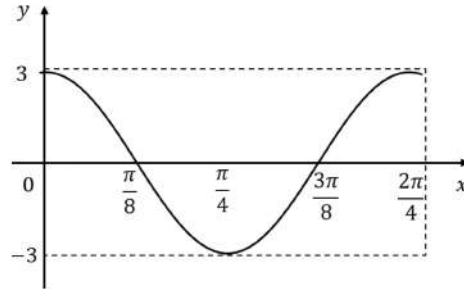
$$y_1 = 3 \cos x, \quad p(y_1) = 2\pi.$$



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_1) = 2\pi \\ \text{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

$$y_2 = 3 \cos(4x), \quad p(y_2) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = \frac{\pi}{2} \\ \text{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

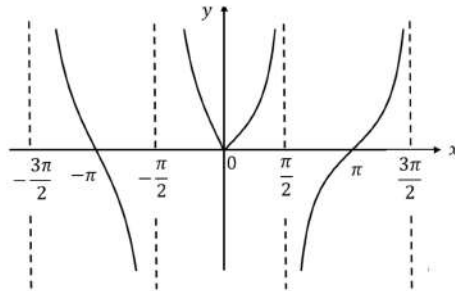
Problema 5.1

Use translações e reflexões para esboçar o gráfico da função f , definida por:

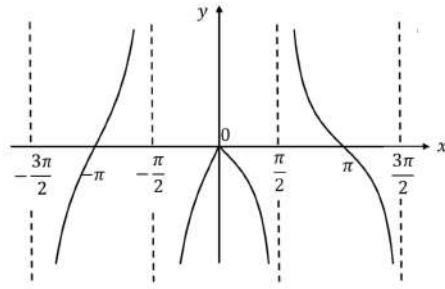
$$f(x) = |1 - 2 \operatorname{tg} |x||$$

A priori, usando a definição de módulo, tem-se:

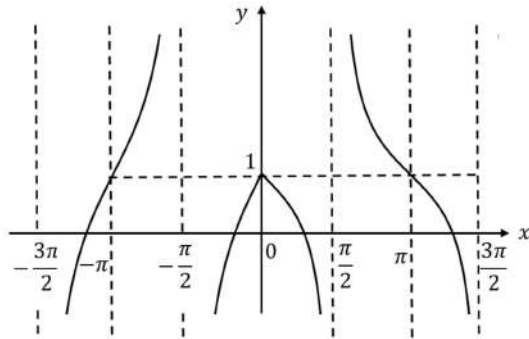
$$y_1 = 2 \operatorname{tg} |x| = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ 2 \operatorname{tg}(-x), & x < 0 \end{cases} \iff y_1 = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ -2 \operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$



$$y_2 = -2 \operatorname{tg} |x| = \begin{cases} -2 \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ -2 \operatorname{tg}(-x), & x < 0 \end{cases} \iff y_2 = \begin{cases} -2 \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ 2 \operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$

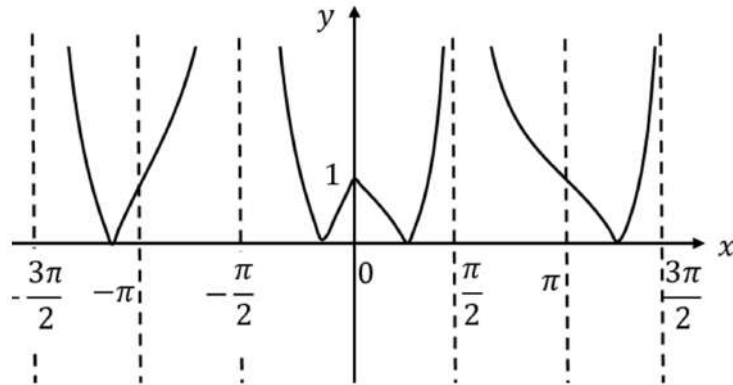


$$y_3 = 1 - 2 \operatorname{tg} |x| = \begin{cases} 1 - 2 \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ 1 + 2 \operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$



Agora, obtemos um esboço do gráfico de f :

$$f(x) = |1 - 2 \operatorname{tg} |x||$$



5.2 Apêndice A

5.2.1 A distância de um ponto à uma reta

Teorema 5.1

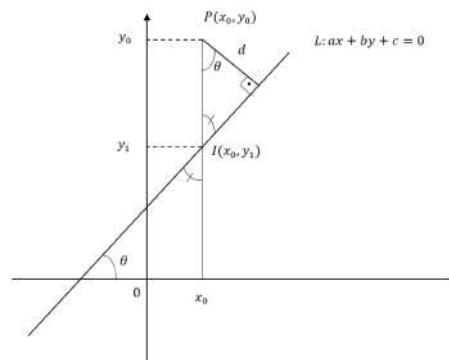
Seja $L : ax + by + c = 0$ a equação de uma reta não-vertical e seja $P_0(x_0, y_0) \in L$. Então, temos:

$$d(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Demonstração

De acordo com a figura, tem-se:



$$\cos \theta = \frac{d(P_0, L)}{|P_0 I|} \implies d(P_0, L) = |P_0 I| \cdot \cos \theta \implies d(P_0, L) = |y_0 - y_1| \cdot \cos \theta. \quad (1)$$

Agora,

$$I(x_0, y_1) \in L \iff ax_0 + by_1 + c = 0 \iff y_1 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}. \quad (2)$$

Observe que:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{a}{b} \implies 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta = 1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2},$$

ou ainda,

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|} \implies \cos \theta = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

Além disso, substituindo (2) e (3) em (1), obtemos:

$$d(P_0, L) = \left| y_0 - \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right) \right| \cdot \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c| \cdot |b|}{|b| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

De sorte que:

$$d(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



5.2.2 Áreas das regiões limitadas pelos triângulos inscritos na elipse e circunferência

Teorema 5.2

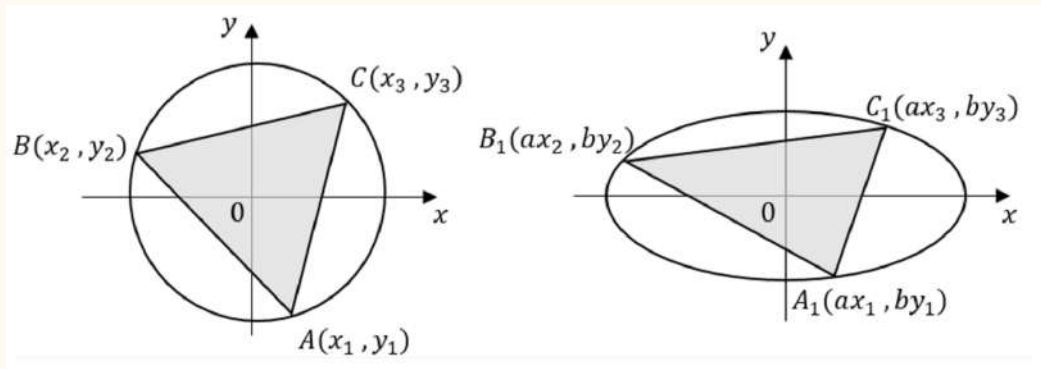
Considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $T(x, y) = (ax, ay)$ e seja \mathbb{A}_1 a área da região limitada pelo triângulo ΔABC , onde: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ descrita por:

$\mathbb{A}_1 = \frac{1}{2} |\mathbb{D}|$, sendo $\mathbb{D} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Então, a imagem do triângulo ΔABC por T tem área \mathbb{A}_2 da

região limitada pelo triângulo $\Delta A_1 B_1 C_1$, onde: $A_1(ax_1, by_1)$, $B_1(ax_2, by_2)$ e $C_1(ax_3, by_3)$ dada por:

$\mathbb{A}_2 = \frac{ab}{2} |\mathbb{D}|$ e

$$\frac{\text{Área}(\Delta A_1 B_1 C_1)}{\text{Área}(\Delta ABC)} = ab \iff \text{Área}(\Delta A_1 B_1 C_1) = ab \cdot \text{Área}(\Delta ABC).$$



Demonstração

Com efeito,

$$\text{Área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} |\mathbb{D}|,$$

e procedendo de forma análoga, vem:

$$\text{Área}(\Delta A_1 B_1 C_1) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} ax_1 & by_1 & 1 \\ ax_2 & by_2 & 1 \\ ax_3 & by_3 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} ab \cdot \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} ab \cdot |\mathbb{D}|.$$

$$\frac{\text{Área}(\Delta A_1 B_1 C_1)}{\text{Área}(\Delta ABC)} = ab \iff \text{Área}(\Delta A_1 B_1 C_1) = ab \cdot \text{Área}(\Delta ABC).$$



5.2.3 Áreas das regiões limitadas pela elipse e circunferência

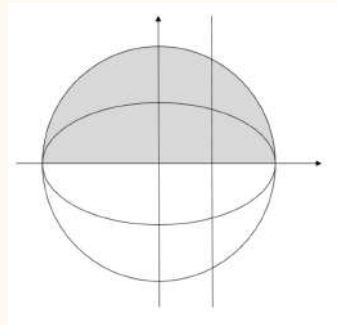
Teorema 5.3

Considerando as regiões limitadas pela elipse e a circunferência, respectivamente

$$\xi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad e \quad \xi_1 : x^2 + y^2 = a^2,$$

então, tem-se:

$$\frac{\text{Área}(\xi)}{\text{Área}(\xi_1)} = \frac{b}{a} \iff \frac{\text{Área}(\xi)}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \iff \text{Área}(\xi) = \pi ab.$$



Então, tem-se que:

$$\text{Área}(\xi) = \pi \cdot ab \text{ u.a. (unidade de área).}$$

Demonstração

As funções que descrevem as semi-elipse e semi-circunferência, com $y \geq 0$ são dadas respectivamente por:

$$y(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad e \quad y_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Daí, a razão entre duas ordenadas correspondentes quaisquer da elipse e da circunferência é apresentada por:

$$\frac{y(x)}{y_1(x)} = \frac{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dito de outro modo, a razão entre duas cordas correspondentes quaisquer da elipse e da circunferência é dada por:

$$\frac{y(x)}{y_1(x)} = \frac{b}{a}.$$

e sabemos que a área limitada pela circunferência, é dada por:

$$\mathbb{A}_1(\xi_1) = \pi a^2 \text{ u.a. (unidade de área).} \quad (1)$$

Além disso, à luz do *Princípio de Cavalieri* para cálculo de área de figuras planas, obtemos

$$\frac{\text{Área}(\xi)}{\text{Área}(\xi_1)} = \frac{y(x)}{y_1(x)} = \frac{b}{a}. \quad (2)$$

Agora, substituindo (1) em (2) segue-se

$$\frac{\text{Área}(\xi)}{\text{Área}(\xi_1)} = \frac{b}{a} \iff \frac{\text{Área}(\xi)}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \iff \text{Área}(\xi) = \pi ab \text{ u.a. (unidade de área)}$$

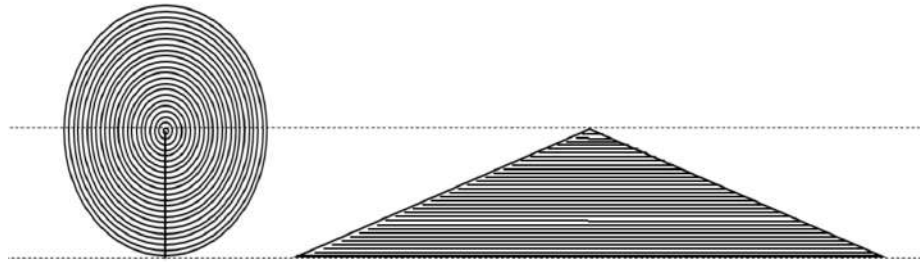
De sorte que:

$$\text{Área}(\xi) = \pi ab \text{ u.a. (unidade de área).}$$



Observação

Usando o Princípio de Cavalieri para calcular as áreas do círculo e da região limitada pelo triângulo, temos:



Observação

A base do triângulo corresponde ao comprimento da circunferência de raio "a" dada por: $B = 2\pi a$ e altura $H = a$.

Logo,

$$A_1(\xi_1) = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{2\pi a \cdot a}{2} = \pi a^2 \text{ u.a. (unidade de área).}$$

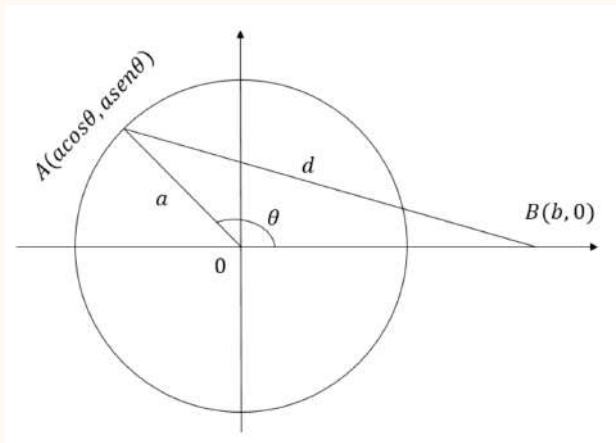
5.3 Apêndice B

5.3.1 Lei dos cossenos usando a distância entre dois pontos

Teorema 5.4

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ o ângulo $A\hat{O}B$ e sejam $A(a \cos \theta, a \sin \theta)$, $B(b, 0)$ em $x^2 + y^2 = a^2$, com $b > a$, então, temos:

$$d^2(A, B) = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cos(\theta)$$



Demonstração

Basta calcular a distância entre A e B , vejamos:

$$\begin{aligned} d^2(A, B) &= (a \cos \theta - b)^2 + (a \sin \theta - 0)^2 \\ &= a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2a \cdot b \cos(\theta). \end{aligned}$$

Agora, como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ segue-se que:

$$d^2(A, B) = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cos(\theta)$$

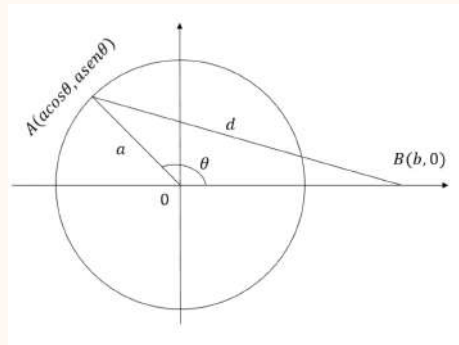
■

5.3.2 Uma prova simples do $\cos(a-b)$ usando a distância entre dois pontos e a lei dos cossenos

Teorema 5.5

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e sejam $A(\cos a, \sin a)$, $B(\cos b, \sin b)$ e $C(1, 0)$ em $x^2 + y^2 = 1$, então, temos:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$



♥

Demonstração

A priori, a distância de A até B , será descrita por:

$$\begin{aligned} [d(A, B)]^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 \\ &= (\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) - 2[\cos a \cos b + \sin a \sin b] \\ &= 2 - 2[\cos a \cos b + \sin a \sin b] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Por outro lado, a lei dos cossenos para o triângulo $\triangle AOB$, nos dá:

$$[d(A, B)]^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos(a - b). \quad (2)$$

Agora, comparando (1) e (2), obtem-se:

$$2 - 2 \cos(a - b) = 2 - 2[\cos a \cos b + \sin a \sin b].$$

Portanto,

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

■

Consequências

$$C_1) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Demonstração

Com efeito,

$$\cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b).$$

Como $\cos(-b) = \cos b$ e $\sin(-b) = -\sin b$ segue-se que:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

■

Notação: $\sin x = \text{sen } x$ (seno do ângulo x)

Consequência

Fazendo $a = b$ em $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, obtemos:

$$a = b \implies \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$C_2) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Demonstração

De fato,

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \\ &= \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

■

$$C_3) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Demonstração

De fato,

$$\sin[a - (-b)] = \sin a \cos(-b) - \sin(-b) \cos a.$$

Agora, sabendo-se que $\cos(-b) = \cos b$ e $\sin(-b) = -\sin b$, obtemos:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

■

Consequência

Fazendo $a = b$ em $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, vem:

$$a = b \implies \sin(2a) = 2 \sin a \cos b.$$

■

C_4) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b \neq \frac{\pi}{2}$, então, temos:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Demonstração

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Agora, dividindo numerador e denominador por $\cos a \cos b \neq 0$, vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a + b) &= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} \\ &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

■

Consequência

Fazendo $a = b$ em $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$, obtemos:

$$a = b \implies \operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

■

C_5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b \neq \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Demonstração

Basta notar que: $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg}(b)$

$$\operatorname{tg}[a + (-b)] = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

■

C_6) Para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(i) \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad (ii) \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned} (i) \quad \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \text{ e } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \\ \implies \cos(2a) &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ \implies 2 \cos^2 a &= 1 + \cos(2a) \\ \implies \cos^2 a &= \frac{1 + \cos(2a)}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}.$$

■

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} (ii) \quad \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \text{ e } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a \\ \implies \cos(2a) &= 1 - \sin^2 a - \sin^2 a \\ \implies \cos(2a) &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \implies 2 \sin^2 a &= 1 - \cos(2a) \\ \implies \sin^2 a &= \frac{1 - \cos(2a)}{2}. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

■

5.3.3 Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R}

Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N(0, 1)$ e $Q(u, 0)$ no plano. Mostre que, além do ponto N , essa reta corta a circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$ no ponto (x, y) , onde $x = \frac{2u}{u^2+1}$ e $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$. Em seguida, escreva as equações paramétricas da reta que passa por $N(0, 1)$ e pelo ponto $P(x, y)$ da circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$. Prove que esta reta corta o eixo das abscissas no ponto $\xi(P) = (u, 0)$, onde $u = \frac{x}{1-y}$. A função $\xi : C \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\xi(P) = \xi(x, y) = u = \frac{x}{1-y},$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R} , cuja inversa

$$\begin{aligned} \xi^{-1} &: \mathbb{R} \rightarrow C \setminus \{N\} \\ u &\mapsto \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{aligned}$$

tal que:

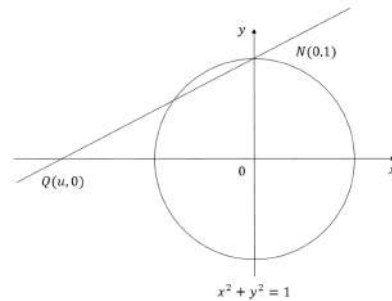
$$\begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}.$$

A função ξ chama-se a *projeção estereográfica* de $C \setminus \{N\}$ sobre \mathbb{R} , e sua inversa fornece uma outra parametrização da circunferência (exceto o "polo norte" N) por meio de funções racionais.

Demonstração

Projeção Estereográfica ξ e sua inversa ξ^{-1} em \mathbb{R}^2 .

A equação da circunferência dada por $C : x^2 + y^2 = 1$ (i) A equação da reta L que passa por $N(0, 1)$ e



$Q(u, 0)$, é dada por:

$$X(t) = (x(t), y(t)), \text{ onde: } \begin{cases} x(t) = 0 + at \\ y(t) = 1 + bt, \end{cases}$$

sendo $v = (a, b) = \overrightarrow{NQ} = (u, -1)$ a direção de L .

Logo, $X(t) = (x(t), y(t)) = (ut, 1 - t)$, onde:

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (I)$$

Afirmação: $L \cap C = \{P\}$, onde:

$$P(x, y).$$

Com efeito, $u^2 t^2 + (1 - t)^2 = 1$, então, temos: $(u^2 + 1)t^2 - 2t = 0$.

Portanto,

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{u^2 + 1} \quad (II)$$

Agora, levando (II) em (I), obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + 1} \\ y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \end{cases}$$

De sorte que: $P(x, y) = \left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right)$.

(ii) A equação da reta que passa por $N(0, 1)$ e $P\left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\right)$ cujo vetor diretor é $v_0 = \overrightarrow{NP}$ é descrita por:

$$L : \begin{cases} x_0 = 0 + \frac{2u}{u^2 + 1}t \\ y_0 = 1 - \frac{2}{u^2 + 1}t \end{cases}.$$

Agora, L corta o eixo xx em $Q(x_0, 0)$.

Portanto, $\xi(P) = \xi(x, y) = (u, 0)$,

onde $L : \begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \implies y = 1 - \frac{x}{u} \implies x = (1 - y)u \implies u = \frac{x}{1 - y}, y \neq 1$.

Consequentemente, vem:

A *Projeção Estereográfica* ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R} , ou seja,

$C \setminus \{N\}$ e \mathbb{R} é um isomorfismo ($C \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R}$), sendo:

$$\begin{aligned} \xi & : C \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \xi(x, y) = u = \frac{x}{1-y}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} \xi^{-1} & : \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{aligned}$$

onde:

$$L : \begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}.$$

■

5.4 Apêndice C

5.4.1 Um pouco da História do Matemático Karl Friedrich Gauss



(Capturado em 28 de julho de 2024 às 11h 30min)

(<https://www.uc.pt/fctuc/dmat/seccoes-servicos/biblio-mat/colecoes-especiais/biografias/karl-friedrich-gauss/?q=Gauss>)

Matemático, astrônomo e físico alemão, criador da geometria diferencial, conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos", a ele se devem importantíssimos estudos de matemática, física, geometria e astronomia. Entre outras coisas, desenhou o heptadecágono, inventou o telégrafo e definiu o conceito de números complexos.

Karl Friedrich Gauss nasceu a 30 de Abril de 1777 em Brunswick, Alemanha. Filho de uma família humilde, desde muito cedo foi visto como uma criança prodígio. Aprendeu a ler e a somar sozinho. Aos três anos corrigiu um erro do pai quando este calculava os salários dos operários.

Quando estudava na escola primária, o professor pediu aos alunos que tentassem resolver a soma de todos os números compreendidos entre 1 e 100. O professor pensou que assim iria manter os alunos ocupados durante um bom tempo mas, para seu espanto, em poucos minutos Gauss resolveu o problema.

Gauss conseguiu chegar ao resultado correto porque reparou que somando todos os pares $1 + 100$; $2 + 99$; $3 + 98$; ... $50 + 51$ somavam sempre 101 então, a soma de todos os pares seria $50 \times 101 = 5050$. Desta forma encontrou, sem saber, a propriedade da simetria das progressões aritméticas.

A fama de Gauss chegou aos ouvidos do Duque de Brunswick, o qual lhe facilitou recursos econômicos para que Gauss continuasse os seus estudos, pois era um desperdício este jovem rapaz não continuar a estudar. Em 1795 frequentou a Universidade de Göttingen. Em 1796 descobriu o método de desenhar com régua e compasso o heptadecágono, polígono com 17 lados, que desde o tempo dos gregos os geômetras tentavam desenhar. Publicou *Disquisitiones Arithmeticae* em 1801, que é um dos livros de matemática mais importante da história da matemática, no qual reúne as ideias que desenvolveu desde os 17 anos de idade. Entre elas está a demonstração matemática de que é possível desenhar alguns polígonos regulares utilizando apenas esquadros e compasso, mas não qualquer polígono. Ainda nesta obra Gauss apresenta a lei de reciprocidade quadrática, classificada por ele, como a "joia da aritmética" e demonstrado o teorema segundo o qual todo inteiro positivo pode ser representado de uma só maneira como produto de primos.

No começo do século *XIX* abandonou a aritmética para se dedicar à astronomia, criando um método para acompanhar a órbita dos satélites, usado até hoje.

Obteve o doutoramento na Universidade de Helmstädt, tendo começado em 1807 a leccionou como professor de astronomia (apesar de detestar dar aulas) e director do Observatório de Göttingen, durante 40 anos.

Desenvolveu o método dos mínimos quadrados em 1812 que, aplicado na resolução das distribuições de probabilidade nos campos da mecânica, estatística e economia, e na abordagem da forma das superfícies curvas mediante expressões matemáticas, permitiu-lhe determinar pela primeira vez o tamanho e forma aproximados da Terra. Em 1833 com a ajuda de Weber construiu o primeiro telégrafo o qual só foi usado entre a sua casa e o observatório de Göttingen.

No campo da Estatística, Gauss é famoso pela descoberta da distribuição normal, também conhecida pela distribuição Gaussiana, que trata da distribuição de certos valores ao longo de uma curva em forma de sino (contribuição extremamente valiosa no campo da estatística).

Gauss foi nomeado membro da Royal Society em 1804 e recebeu Medalha de Copley em 1838. Publicou várias obras entre as quais *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium* em 1809; *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* em 1816; *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* em 1823.

Casou aos 23 anos, com Johanna Osthoff, que faleceu ao dar à luz o seu terceiro filho. Casou novamente em 1810, tendo tido mais três filhos, um rapaz e duas raparigas. A sua segunda esposa faleceu em 1831.

A 23 de Fevereiro de 1855, aos 78 anos de idade, Gauss morre durante o sono, vítima de uma doença prolongada. Deixou-nos como recordação o seu trabalho imenso que viverá para sempre na matemática, fruto do mais extraordinário espírito matemático de todos os tempos.

5.4.2 Números Complexos

Nos textos do Ensino Médio, em geral, são apresentados os números complexos a forma $z = (a, b)$ ou algébrica $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, onde: $i^2 = -1$ e $i = (0, 1)$, é necessário fé, para aceita a identificação

$$z = (a, b) \simeq a + bi$$

A equação $x^2 + a = 0$, $a > 0$ não é solúvel em \mathbb{R} . Construir um corpo \mathbb{C} que contenha um subcorpo $\emptyset \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, onde \mathbb{S} seja isomorfo a \mathbb{R} e a equação $x^2 + a = 0$, $a > 0$ seja solúvel.

Lema 5.1

Seja $\emptyset \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, onde:

$$\mathbb{S} = \{(a_o, 0) \in \mathbb{R}^2 : a_o \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}$ onde: \mathbb{S} é isomorfo "a grosso modo bijetora" a \mathbb{R} .



De fato, $\langle \mathbb{S}, +, \cdot \rangle$ é fechado

$$+ : (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in \mathbb{S}.$$

$$\cdot : (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0) \in \mathbb{S}.$$

De sorte que: \mathbb{S} é fechado.



Consideremos $\Phi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi(x, 0) = x.$$

Afirmção 1: Φ é um homomorfismo

Basta notar que:

$$(i) \quad \Phi((a, 0) + (b, 0)) = \Phi(a + b, 0) = a + b = \Phi(a, 0) + \Phi(b, 0)$$

$$(ii) \quad \Phi((a, 0) \cdot (b, 0)) = \Phi(a \cdot b, 0) = a \cdot b = \Phi(a, 0) \cdot \Phi(b, 0).$$

Portanto, Φ é um homomorfismo.



Afirmção 2: Φ é injetora.

De fato,

$$\Phi(a_o, 0) = \Phi(b_o, 0) \Rightarrow a_o = b_o \Rightarrow (a_o, 0) = (b_o, 0)$$

Usando uma equivalência tautológica, temos:

$$a_o \neq b_o \Rightarrow (a_o, 0) \neq (b_o, 0) \Rightarrow \Phi(a_o, 0) \neq \Phi(b_o, 0).$$

Logo, Φ é injetora.

Afirmção 3: Φ é sobrejetora.

Com efeito, note que:

$$\forall m_o \in \mathbb{R}, \exists (m_o, 0) \in \mathbb{S} : \Phi(m_o, 0) = m_o.$$

ou ainda, Φ é sobrejetora.

Por conseguinte, vem : Φ é bijetora.



Note que:

$$(A) (a, 0) \simeq a$$

$$(B) (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

$$(C) i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) \simeq -1.$$

De sorte que: $z = (a, b) \simeq a + bi$, onde $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$.

5.4.3 $P_1(\mathbb{R})$ – Subespaço dos polinômios de grau menor do que ou igual a 1, com entradas reais.

$$\mathbb{W}_1 = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Desta forma, temos:

$$p(x) = ax^1 + bx^0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

Dito de outro modo, no subespaço \mathbb{W}_1 , temos todos os casos particulares de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, a saber:

(i) $0(x) = 0x + 0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ (polinômio identicamente nulo).

(ii) $p(x) = bx^0 = b$ (polinômio constante ou de grau zero) $\in \mathbb{P}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (neste caso)

(iii) $p(x) = ax$ polinômio

(a rigor seria função polinomial na indeterminada x) passando pela origem, também chamado de função linear no sentido da álgebra linear; não por ser reta, $p(x) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, dito de outro modo, temos:

$$\mathbb{W}_0 = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \mid b = 0\},$$

onde: \mathbb{W}_0 é um subespaço de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ e finalmente o subespaço

$$\mathbb{W}_1 = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

englobando todos os casos anteriores e mesmo sendo uma reta,

$$p(x) = ax + b = f(x)$$

conhecida no ensino médio como como função afim, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

O matemático, Elon Lages Lima, aborda

$$p(x) = ax + b = f(x), \text{ com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Olhando como um subespaço \mathbb{W}_1 de polinômios de grau no máximo 1.

(Terão oportunidade de estudar detalhadamente num curso de *Álgebra Linear*)

Em geral quando falamos de função afim ou função polinomial do 1º grau (*Alguns textos do ensino Médio chama de função do 1º grau, sabemos que: função não tem grau*) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

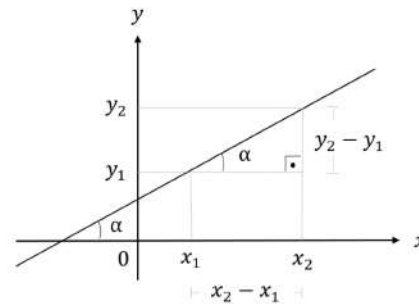
$$f(x) = ax + b$$

seria melhor dizer taxa de variação.

$$q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

deixar o termo coeficiente angular da reta para

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$



5.5 Apêndice D

Nem tudo são flores

Como diz o matemático Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Moraes: em seu livro, *Manual de Redação Matemática: Sociedade Brasileira de Matemática: SBM, 2018.*

*”Cuidado para definir realmente aquilo que se deseja:
Não compre nem venda gato por lebre”*

No Ensino Médio, é comum os textos afirmarem: toda função trigonométrica periódica é periódica, podemos ter $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \sin(\alpha x)$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional).

” Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas.”

Refletindo um pouco sobre o tema, se encontra um contra-exemplo, basta escolher, de forma mais geral, escolhendo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional), podemos

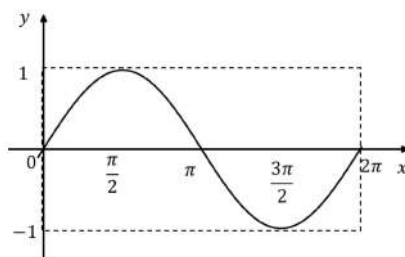
caracterizar infinitos contra-exemplos, para tanto, basta mudar o valor do α

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional). Mostre que: f não é uma função periódica.

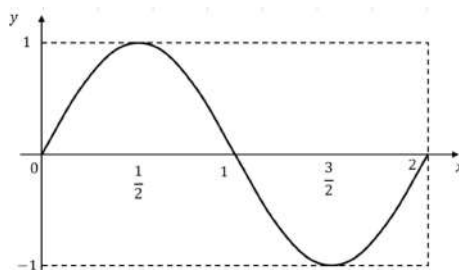
A priori, considere duas funções periódicas, por exemplos:

(i) $f(x) = \sin x$, com período fundamental $p(f) = 2\pi$



e seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional), em particular, escolha $\alpha = \pi$ e a função g dada por:

(ii) $g(x) = \sin(\pi x)$, com período fundamental é $p(g) = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.



Generalizando g com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional), temos:

$$g(x) = \sin(\alpha x), \alpha > 0$$

Afirmção

Seja g com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional), a função definida por:

$$g(x) = \sin(\alpha x), \alpha > 0.$$

Então, g é periódica e tem período fundamental:

$$p(g) = \frac{2\pi}{\alpha}$$

Demonstração

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \iff f(x+p) - f(x) = 0 \\ \sin(\alpha x + \alpha p) &= \sin(\alpha x) \iff [\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] = 0. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{cases} \implies \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a.$$

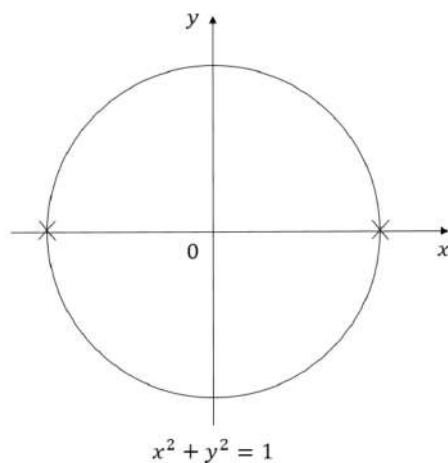
Agora, fazendo $\begin{cases} a+b=u \\ a-b=v \end{cases}$, obtemos: $\begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{u-v}{2} \end{cases}$. Assim.

$$\sin(u) - \sin(v) = 2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] &= 0 \\ 2 \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Se $\alpha x = \frac{\pi}{2}$, então,

$$\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \implies \sin^2\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \implies \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0$$



$$\implies \frac{\alpha p}{2} = k_1 \pi \implies \alpha p = 2k_1 \pi, k_1 \in \mathbb{Z}, \implies p = \frac{2k_1 \pi}{\alpha}, k_1 \in \mathbb{Z},$$

De sorte que f é periódica. Além disso, o menor valor positivo de p é quando $k_1 = 1$.

Logo, o período fundamental da função g é:

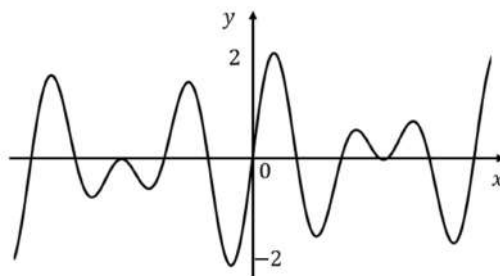
$$p = \frac{2\pi}{\alpha}.$$



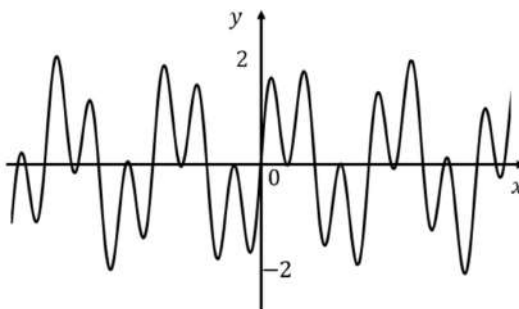
Algumas simulações com valores de $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, onde

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x).$$

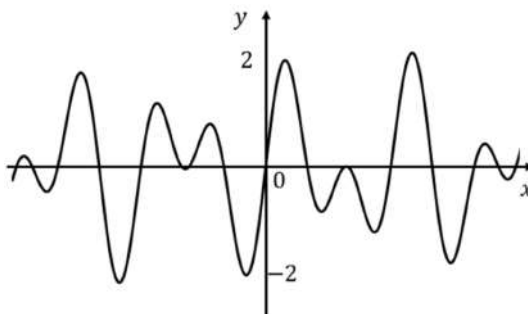
1. $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$, $\alpha = \sqrt{2}$.



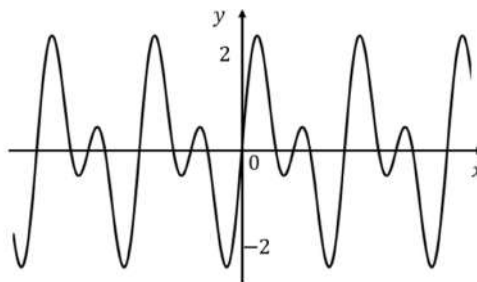
2. $f(x) = \sin x + \sin(\pi x)$, $\alpha = \pi$.



3. $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{3}x)$, $\alpha = \sqrt{3}$.



4. $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ esta função é periódica.



Depois de algumas simulações, vamos arriscar um palpite ou inferir que seja provável (conjecturar). Será que a função f , definida por:

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional) é não periódica?

Conjectura

Seja f uma função definida por:

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irracional). f não é uma função periódica.

Demonstração

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \\ \sin(x+p) + \sin(\alpha x + \alpha p) &= \sin x + \sin(\alpha x) \iff \\ \sin(x+p) - \sin x &= -[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Vale a pena observar que:

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{cases} \implies \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a.$$

Agora, fazendo $\begin{cases} a+b = u \\ a-b = v \end{cases}$, obtemos: $\begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{u-v}{2} \end{cases}$. Assim.

$$\sin(u) - \sin(v) = 2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sin(u) - \sin(v) &= 2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right). \\ \sin(x+p) - \sin x &= 2 \sin\left(\frac{x+p-x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+p}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{p}{2}\right) \cos\left(x + \frac{p}{2}\right)\end{aligned}\tag{5.3}$$

e de forma análoga, temos:

$$\begin{aligned}\sin(u) - \sin(v) &= 2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right). \\ -[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] &= -2 \left[\sin\left(\frac{(\alpha x + \alpha p) - \alpha x}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha x + \alpha p + \alpha x}{2}\right) \right] \\ &= 2 \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Agora, levando

$$\begin{aligned}\sin(x+p) - \sin x &= -[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] \\ 2 \sin\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{p}{2}\right) &= -2 \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{p}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right). \\ \sin\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \cos(x) &= -\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) \cdot \cos(\alpha x).\end{aligned}$$

Se $x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \implies \frac{\alpha p}{2} = k_1 \pi \implies \alpha p = 2k_1 \pi, k_1 \in \mathbb{Z}$,

por outro lado, temos:

Se $\alpha x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \implies \frac{p}{2} = k_2 \pi \implies p = 2k_2 \pi, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Daí, vem: $\alpha 2k_2 \pi = 2k_1 \pi \implies \alpha = \frac{k_1}{k_2}$, com $k_2 \neq 0$. Absurdo! Visto que:

α é irracional.

De sorte que f não é periódica. ■

Algumas proposições sobre funções periódicas

Proposição 5.2

Seja f uma função periódica de período $p > 0$ e seja $g(x) = f(ax)$, com $a > 0$, então, g é periódica de período $\frac{p}{a}$. ♠

Demonstração

Com efeito, f uma função periódica de período $p > 0$, então, tem-se:

$$f(ax+p) = f(ax),$$

para todo $x \in D(f)$ (domínio de f).

Agora,

$$g\left(x + \frac{p}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{p}{a}\right)\right] = f(ax+p) = f(ax) = g(x).$$

De sorte que: g é periódica de período $\frac{p}{a}$. ■

Proposição 5.3

Seja f uma função periódica de período $p > 0$ e seja $g(x) = f(ax + b)$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, então, g é periódica de período $\frac{p}{a}$.

Demonstração

Com efeito, f uma função periódica de período $p > 0$, então, tem-se:

$$f((ax + b) + p) = f(ax + b),$$

para todo $x \in D(f)$ (domínio de f).

Agora,

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{p}{a}\right) &= f\left[a\left(x + \frac{p}{a}\right) + b\right] = f((ax + p) + b) \\ &= f((ax + b) + p) = f(ax + b) = g(x). \end{aligned}$$

Portanto, g é periódica de período $\frac{p}{a}$. ■

Exemplo 5.3

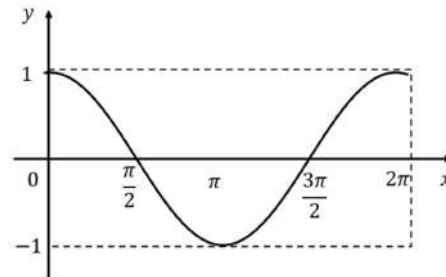
1. $f(x) = \cos(2x)$, período de f :

$$p(f) = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Façamos os esboços gráficos de $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \cos(2x)$. Salientando que: y_2 é obtido de y_1 dividindo cada ponto do gráfico deste por 2.

Vejamos

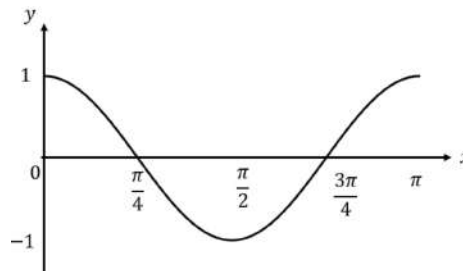
(i) $y_1 = \cos x$



(ii) $y_2 = \cos(2x)$

Observe que o período de y_2 é:

$$p(y_2) = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



Destacando

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$

Imagem de $f : \text{Im}(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$.

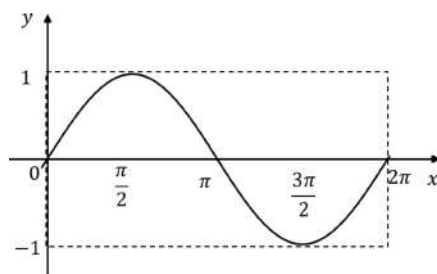
Período de $f : p(f) = \pi$.

2. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, período de f :

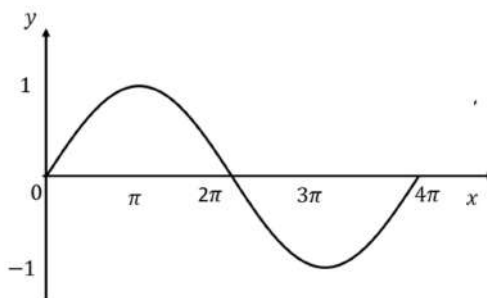
$$p(f) = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Façamos os esboços gráficos $y_2 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ obtido de $y_1 = \sin x$ onde cada ponto do gráfico de y_2 é obtido de y_1 multiplicado por 2. Vejamos

(i) $y_1 = \sin x$, período de $y_1 : p(y_1) = 2\pi$



(ii) $y_2 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, período de $y_2 : p(y_2) = 4\pi$



Destacando:

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$

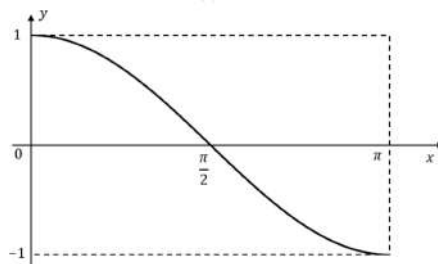
Imagem de $f : \text{Im}(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$.

Período de $f : p(f) = 4\pi$.

5.6 Apêndice E: Funções Trigonômicas Inversas

1. (i) $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

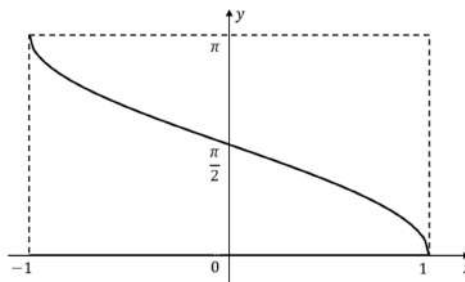
$$f(x) = \cos x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\text{Im}(f) = [-1, 1] \iff f$ é bijetora.

A função inversa de f , $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, é dada por:

$$f^{-1}(x) = \arccos x$$



Exemplo 5.4

Calcule:

(i) $\sin \left[2 \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$ (ii) $\text{tg} \left(\arccos \left(\frac{1}{3} \right) \right)$

Solução

(i)

$$\sin \left[2 \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \sin(2u) = 2 \sin u \cos u$$

Seja $u = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, então, temos:

$$\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall u \in [0, \pi].$$

Agora,

$$\begin{aligned}\sin^2 u &= 1 - \cos^2 u \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sin u = \pm \frac{1}{2}, \forall u \in [0, \pi]$$

Assim,

$$\sin u = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sin \left[2 \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] &= \sin(2u) = 2 \sin u \cos u \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{1}{3} \right) \right) = \operatorname{tgu} = \frac{\sin u}{\cos u}$$

Solução

Seja $u = \arccos \left(\frac{1}{3} \right)$, então, $\cos u = \frac{1}{3}, \forall u \in [0, \pi]$.

Assim,

$$\begin{aligned}\sin^2 u &= 1 - \cos^2 u \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sin u = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Como $\sin u \geq 0, \forall u \in [0, \pi]$, segue-se que:

$$\sin u = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Além disso,

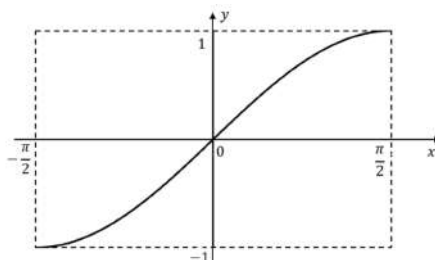
$$\begin{aligned}\operatorname{tgu} &= \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{tg} \left(\arccos \left(\frac{1}{3} \right) \right) = \operatorname{tgu} = 2\sqrt{2}$$

2. (i) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

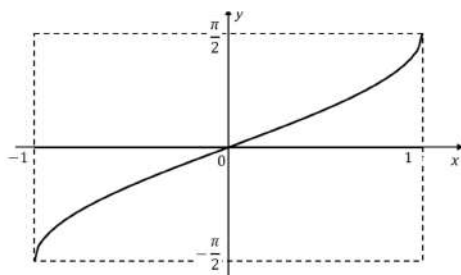
$$f(x) = \sin x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\text{Im}(f) = [-1, 1] \iff f$ é bijetora.

A função inversa de f , $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é dada por:

$$f^{-1}(x) = \arcsin x$$



Exemplo 5.5

Calcule:

(i) $\cos \left[2 \arcsin \left(\frac{1}{2}\right)\right]$ (ii) $\text{tg} \left[2 \arcsin \left(\frac{1}{4}\right)\right]$

Solução

(i)

$$\cos \left[2 \arcsin \left(\frac{1}{2}\right)\right] = \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$$

Com efeito, $u = \arcsin \left(\frac{1}{2}\right)$ se, e somente se, $\sin u = \frac{1}{2}$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Agora,

$$\begin{aligned} \cos^2 u &= 1 - \sin^2 u \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos u \geq 0$, $\forall u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, segue-se que:

$$\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \cos \left[2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \right] &= \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\cos \left[2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

■

(ii)

$$tg \left[2 \arcsin \left(\frac{1}{4} \right) \right] = tg[2u] = \frac{2tgu}{1 + tg^2 u}$$

Solução

Seja $u = \arcsin \left(\frac{1}{4} \right)$, então, $\sin u = \frac{1}{4}$, $\forall u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Assim,

$$\begin{aligned} \cos^2 u &= 1 - \sin^2 u \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Como $\cos u \geq 0$, $\forall u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, segue-se que:

$$\cos u = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} tgu &= \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

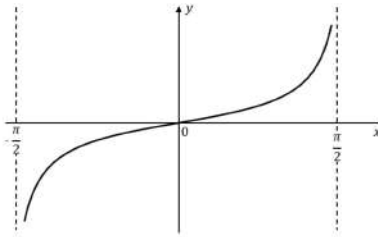
Portanto,

$$\begin{aligned} tg \left[2 \arcsin \left(\frac{1}{4} \right) \right] &= tg[2u] = \frac{2tgu}{1 + tg^2 u} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{15}}}{1 + \frac{1}{15}} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{15}}{15}}{\frac{16}{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \cdot \frac{15}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}. \end{aligned}$$



3. (i) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

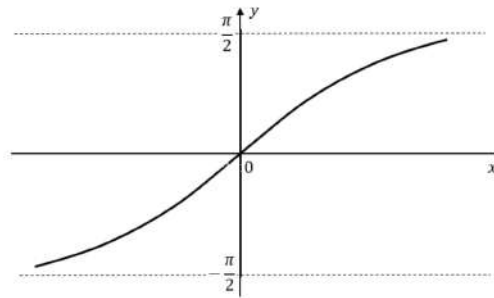
$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \iff f$ é bijetora.

A função inversa de f , $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é dada por:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$



Exemplo 5.6

Mostre que:

$$(i) \quad \sec [\operatorname{arctg}(-3)] = \sqrt{10} \quad (ii) \quad \sec [\operatorname{arctg} x] = \sqrt{1+x^2}.$$

Solução

(i)

$$\sec [\operatorname{arctg}(-3)] = \sqrt{10}$$

Seja $u = \operatorname{arctg}(-3)$, então, $\operatorname{tg} u = -3, \forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \sec^2 u &= 1 + \operatorname{tg}^2 u \\ &= 1 + (-3)^2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sec u = \pm\sqrt{10}.$$

Como $\sec u > 0$, $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, segue-se que:

$$\sec u = \sqrt{10}.$$

Portanto,

$$\sec [\operatorname{arctg}(-3)] = \sqrt{10}$$

■

(ii)

$$\sec [\operatorname{arctg} x] = \sec u$$

Solução

Seja $u = \operatorname{arctg} x$, então, $\operatorname{tg} u = x$, $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \sec^2 u &= 1 + \operatorname{tg}^2 u \\ &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sec u = \pm\sqrt{1 + x^2}.$$

Como $\sec u > 0$, $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, segue-se que:

$$\sec u = \sqrt{1 + x^2}.$$

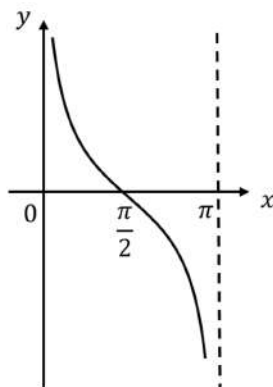
Portanto,

$$\sec [\operatorname{arctg} x] = \sec u = \sqrt{1 + x^2}$$

■

4. (i) $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{cotg} x$$

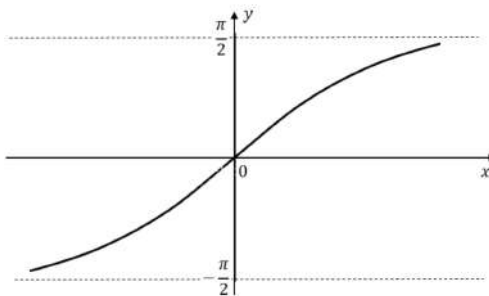


(ii) f é injetora, sobrejetora $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \iff f$ é bijetora.

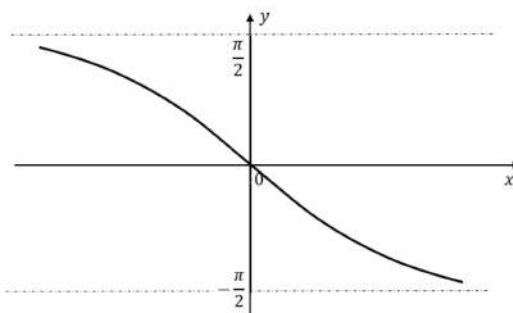
A função inversa de f , $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } x = \text{Arccotg } x$$

$$y_1 = \text{Arctg } x$$



$$y_2 = -\text{Arctg } x$$



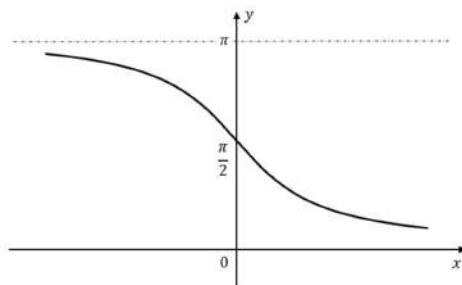
Observação

$$y = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } x = \text{arccotg } x$$

(Será provado no exemplo a seguir)

A função inversa de f , $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ é dada por:

$$f^{-1}(x) = \text{arccotg } x$$



Exemplo 5.7

1. Mostre que:

$$(i) \quad \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x, \quad \forall y \in (0, \pi) \quad (ii) \quad \sin [\operatorname{arccotg} (\sqrt{3})].$$

Solução

(i)

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x, \quad \forall y \in (0, \pi)$$

De fato,

$$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x, \iff \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - y \iff$$

$$x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} = \frac{\cos y}{\sin y} = \operatorname{cotg} y$$

$$\iff x = \operatorname{cotg} y \iff y = \operatorname{arccotg} x, \quad \forall y \in (0, \pi)$$

(ii)

$$\sin [\operatorname{arccotg} (\sqrt{3})] = \sin u$$

Solução

Seja $u = \operatorname{arccotg} (\sqrt{3})$, então, $\operatorname{cotg} u = \sqrt{3}, \forall u \in \forall y \in (0, \pi)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^2 u &= 1 + \operatorname{cotg}^2 u \\ &= 1 + (\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\operatorname{cosec} u = \pm 2.$$

Como $\operatorname{cosec} u > 0, \forall u \in (0, \pi)$, segue-se que:

$$\operatorname{cosec} u = 2 \iff \frac{1}{\sin u} = 2 \iff \sin u = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\sin [\operatorname{arccotg} (\sqrt{3})] = \sin u = \frac{1}{2}.$$

■

2. Calcule:

$$\sin \left[\operatorname{arccotg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right] =$$

Solução

Seja $u = \operatorname{arccotg} \left(-\frac{1}{2} \right)$, então, $\cotg u = -\frac{1}{2}, \forall u \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned} \cotg u &= \frac{\cos u}{\sin u} = -\frac{1}{2} \\ \sin u &= -2 \cos u \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \cos^2 u + \sin^2 u &= 1 \\ \cos^2 u + (-2 \cos u)^2 &= 1 \\ 5 \cos^2 u &= 1. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \implies \sin u = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \implies \sin u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \forall u \in (0, \pi).$$

Logo,

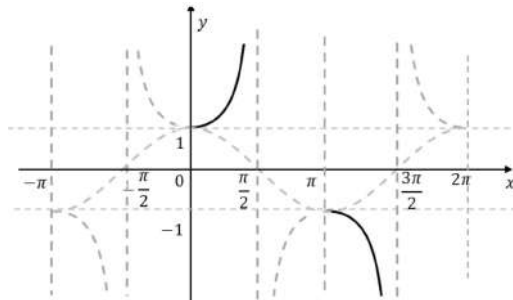
$$\sin \left[\operatorname{arccotg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \sin u = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

■

3. (i) $f : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{A}$, dada por: $f(x) = \sec x$

onde: $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$$f(x) = \sec x$$



A função inversa de f , $f^{-1} : \mathbb{A} \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$ é dada por:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x = \operatorname{arccos} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Fato: Prove que

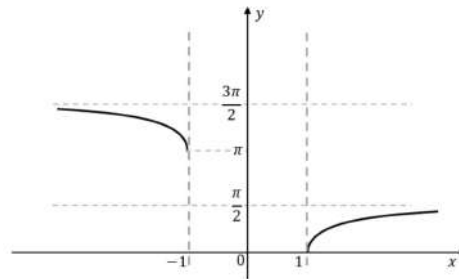
$$y = \operatorname{arccos} \left(\frac{1}{x} \right) = \operatorname{arcsec} x, |x| \geq 1.$$

De fato,

$$y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \iff \cos y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{\cos y} = \sec y \iff y = \operatorname{arcsec} x.$$

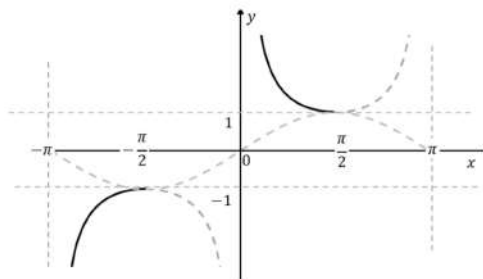
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

■



4. (i) $f : (-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{A}$, dada por: $f(x) = \operatorname{cosec} x$
 onde: $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$$f(x) = \operatorname{cosec} x$$



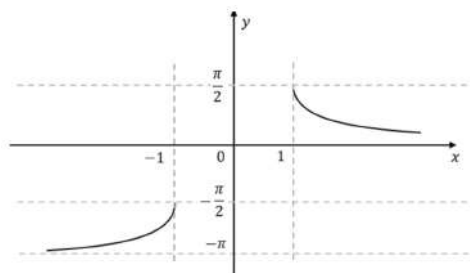
Problema 5.2

$$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x = \operatorname{arccossec} x, \forall x : |x| \geq 1$$

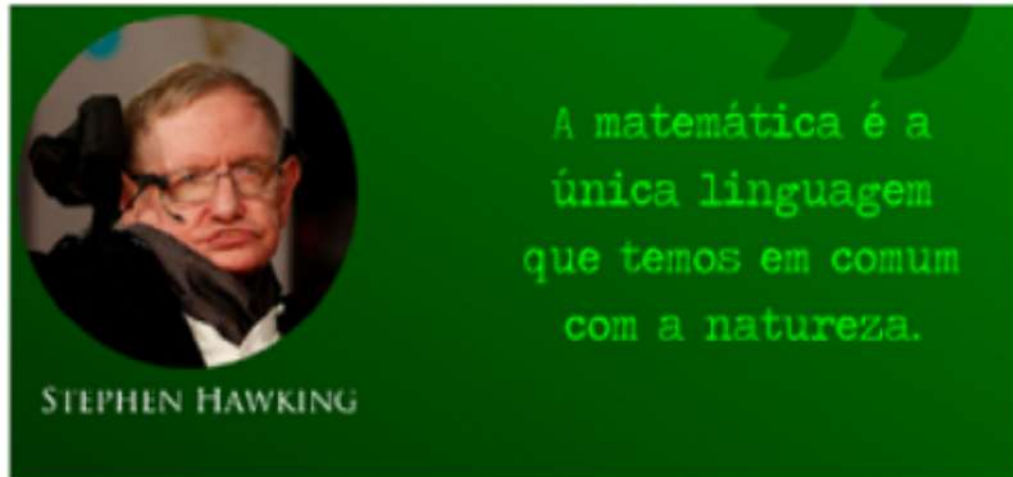
Solução

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x \iff \operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - y \iff \\ x &= \sec\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \frac{1}{\sin y} \iff \\ \iff x &= \operatorname{cossec} y \iff y = \operatorname{arccossec} x. \end{aligned}$$



Capítulo 6



Aplicações em Matemática

O Matemático Babilônio que vai ao ministério da corte pedir financiamento para sua pesquisa, O ministro fica meio cético porque esse matemático está estudando números primos; ele acha muito teórico, que não serve para nada. O matemático tenta se justificar, daqui a 4.000 anos quando inventarem a internet, a criptografia, o cartão de crédito, os números primos vai ser importantíssimo. Pode levar 4.000 anos para acontecer à aplicação: quem cria matemática por estética, não se preocupa se na próxima semana, próximo mês, se encontre aplicações, é assim que a Ciência Avança.

6.1 Um pouco de história em torno do nome matriz

O pai do nome matriz Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e saíram da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Cauchy, 1826 : tableau (tabela). O nome matriz só veio com *James Joseph Sylvester*, 1850. Seu amigo *Cayley*, com sua famosa *Memoir on the Theory of Matrices*, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. Por que **Sylvester** deu o nome matriz às matrizes ? Usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma matriz a partir da qual podemos formar varios sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas..." *artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pag 363 – 370*). Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com *Cayley* que elas passam a ter vida própria e gradativamente começam a suplantam os determinantes em importância.

Surgimento dos primeiros resultados da Teoria das Matrizes

Costuma-se dizer que num curso mais avançado curso de *Teoria das Matrizes* ou de sua versão mais abstrata, a Álgebra Linear êdeve ir no mínimo até o **Teorema Espectral**. Pois bem, esse teorema e toda uma série de resultados auxiliares já eram conhecidos antes de *Cayley* iniciar a estudar as matrizes como uma classe notável de objetos matemáticos. Como se explica isso? Esses resultados, bem como a maioria dos resultados básicos da Teoria da Matrizes, foram descobertos quando os matemáticos dos séculos *XVIII* e *XIX* passaram a investigar a *Teoria das Formas Quadráticas*. Hoje, consideramos imprescindível estudar essas formas através da notação e metodologia matricial, mas naquela época elas eram tratadas escalarmente. Mostremos aqui a representação de uma forma quadrática de duas variáveis, tanto via notação escalar como com a mais moderna notação matricial:

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^t A X,$$


$$\text{onde: } X^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} A^t = A \text{ (matriz simétrica)}$$

O primeiro uso implícito da noção de matriz ocorreu quando Lagrange 1790 reduziu a caracterização dos máximos e mínimos, de uma função real de várias variáveis, ao estudo do sinal da forma quadrática associada à matriz das segundas derivadas dessa função. Sempre trabalhando escalarmente, ele chegou à uma conclusão que hoje expressamos em termos de matriz positiva definida. Após Lagrange, já no século *XIX*, a *Teoria das Formas Quadráticas* chegou a ser um dos assuntos mais importantes em termos de pesquisas, principalmente no que toca ao estudo de seus invariantes. Essas investigações tiveram como subproduto a descoberta de uma grande quantidade de resultados e conceitos básicos de matrizes. Assim, podemos dizer que a *Teoria das Matrizes* teve como mãe a *Teoria das Formas Quadráticas*, pois que seus métodos e resultados básicos foram lá gerados. Hoje, contudo, o estudo das formas quadráticas é um mero capítulo da Teoria das Matrizes. Observemos, ademais, que os determinantes em nada contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Matrizes.

6.2 Considerações Preliminares

O objetivo deste Capítulo é estudar, evitando ao máximo o formalismo, os seguintes tópicos: equações lineares, sistemas de equações lineares, sistema linear homogêneo, escalonamento, discussões de sistemas lineares quanto ao número de soluções e uma abordagem sucinta sobre as matrizes, os resultados serão necessários para os capítulos posteriores. Os aspectos históricos sobre os sistemas de equações lineares e a relação com a teoria das matrizes. A razão deste trabalho foi de se tentar evidenciar a indissociabilidade que existe entre esses dois assuntos que muitas das vezes são tratados separadamente no Ensino Médio. Este trabalho foi de maneira bibliográfica, usando-se a internet, livros de álgebra linear. Nesse sentido, está pautada em autores tais como: Boyer (1996), Eves (2004), Lipschutz (1994), Elon lages (2019), Boldrine (2002), Carlos Callioli (2004), Serge Lang (2018).

Definição 6.5

Se no sistema (3.2) tivermos $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, então dizemos que o sistema linear é homogêneo. 


Exemplo 6.4

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 4x + y + z = 0 \\ 2x + y - 7z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_3 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 7x + y - 6z = 0 \end{cases} .$$

**Observação**

Todo sistema linear homogêneo sempre tem solução, pelo menos a solução trivial, ou seja, aquela solução em que todas as variáveis são nulas.

6.3.3 Sistemas Equivalentes**Definição 6.6**

Dizemos que os sistemas de equações lineares S_1 e S_2 são equivalentes se, e somente se, toda solução do sistema S_1 é também solução do sistema S_2 e vice-versa. 

Notação

$$S_1 \sim S_2.$$

Exemplo 6.5

$$S_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 4x + 2y - 2z = 4 \end{cases} .$$

são equivalentes, visto que: a tripla ordenada $(1, 1, 1)$ é a solução. Em símbolo, temos: $S_1 \sim S_2$.

6.3.4 Sistema Escalonado

A nossa discussão do escalonamento será apresentada através de exemplos, ou seja, não usaremos de formalismo para descrever o mesmo.

Exemplo 6.6

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_3 : \begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ y + z - t = 3 \\ z + 2t = 2 \end{cases} .$$

$$S_4 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_5 : \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ z - 2w = 0 \end{cases} .$$

são sistemas escalonados.



Observação

1. Em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo;
2. O número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, "cresce da esquerda para direita de equação para equação".

6.3.5 Critério para escalonar um sistema linear

1. Permutar duas equações quaisquer de um sistema linear, ou seja, $\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_j$ e $\mathbb{E}_j \rightarrow \mathbb{E}_i$;
2. Multiplicar todos os termos de uma equação por um número α não-nulo, isto é, $\alpha\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_i$;
3. Somar uma equação a uma outra, esta última multiplicada por um número α não-nulo e substituir em uma terceira equação, ou seja, $\mathbb{E}_j + \alpha\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_k$.

Exemplo 6.7

Escalone o sistema, dado por: $S : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$.

Solução

Considerando as operações $\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ e $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, obtemos:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0 - 2y + 0 = -2 \\ 0 - 3y + 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + z - y = 1 \\ 0 + 3z - 3y = 0 \\ 0 + 0 - 2y = -2 \end{cases}$$

Portanto, o sistema está na forma escalonada

$$\begin{cases} x + z - y = 1 \\ 0 + 3z - 3y = 0 \\ 0 + 0 - 2y = -2 \end{cases}$$

Agora, se desejamos determinar a solução, basta substituir $y = 1 \implies z = 1$ e $x = 1$.

De sorte que:

$$S = \{(1, 1, 1)\}$$

é o conjunto solução do sistema dado. ■

6.3.6 Classificar um sistema linear no tocante ao número de soluções

Para concluir esta discussão, vamos classificar um sistema linear no tocante ao número de soluções.

$$\text{Sistema: } \begin{cases} \text{Compatível: } \begin{cases} \text{Determinado: solução única} \\ \text{e} \\ \text{Indeterminado: infinitas soluções} \end{cases} \\ \text{Incompatível: } \text{Não existe solução} \end{cases}$$

Exemplo 6.8

1. Que condição deve impor-se a “ a , b e c ” para que o sistema nas incógnitas x , y e z tenha solução

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

Notações

$\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e \mathbb{E}_3 são as equações

$2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ (Lê-se: duas vezes a equação 1 menos a equação 2 substituindo na equação 2).

$\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ (Lê-se: equação 1 menos a equação 3 substituindo na equação 3).

Solução

Considerando as operações $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 0 - 2y + 5z = 2a - b \\ 0 + 4y - 10z = a - c \end{cases} .$$

Desta forma, fazendo $2\mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, segue-se que:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 0 - 2y + 5z = 2a - b \\ 0 + 0 = 5a - 2b - c \end{cases}$$

Portanto, o sistema tem solução se, e somente se,

$$5a - 2b - c = 0$$

■

2. Escalone o sistema e discuta-o em função do parâmetro “ a ”:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2. \end{cases}$$

Antes de passarmos a resolução, vejamos alguns comentários:

As variáveis são x, y e z

Usaremos as notações: equações $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e \mathbb{E}_3 .

$3\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ (onde lê-se: três vezes a equação 1 menos a equação 2 substituindo na equação 2)

Solução

Considerando as operações $3\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ e $4\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, tem-se:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 0 + 7y - 14z = 10 \\ 0 + 7y + (2 - a^2)z = 14 - a \end{cases} .$$

Agora, fazendo $\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 0 + 7y - 14z = 10 \\ 0 + 0 + (a^2 - 16)z = a - 4 \end{cases} .$$

Assim,

$$(a + 4)(a - 4)z = a - 4.$$

Vale ressaltar que teremos três casos a analisar.

1º Caso: $a = -4 : 0 \cdot z = -8 \implies$ O sistema é impossível.

2º Caso: $a = 4 : 0 \cdot z = 0 \implies 7y - 14z = 10$. Como para cada y teremos um valor de $z = \frac{7y-10}{14}$. Neste caso, o sistema é compatível e indeterminado.

3º Caso: $a \neq 4$ e $a \neq -4 : z = \frac{a-4}{(a+4)(a-4)} = \frac{1}{a+4}$. Neste caso, o sistema é compatível e determinado: solução única. ■

3. Escalone o sistema e discuta-o em função do parâmetro “ k ”:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$$

Solução

Com efeito, fazendo a operação com as equações \mathbb{E}_1 e \mathbb{E}_2 , dada por: $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ (k-4)y + 2(k-4)z = -1 \end{cases}$$

assim teremos dois casos a considerar $k - 4 = 0$ ou $k - 4 \neq 0$.

1º Caso: $k = 4 : 0y + 0z = -1$. Neste caso, o sistema é impossível. (incompatível)

2º Caso: $k \neq 4 : -y + 2z = \frac{-1}{k-4}$. Desta forma, o sistema é compatível e indeterminado. ■

4. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3)X = 0.$$

Solução

(i) Com efeito, temos:

$$\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3) = (1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = 3 \text{ ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).



Observação

(A) Notação:

$$\prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

Produtório de a_{ii} , variando de $i = 1$ até $i = n$

(B) Se $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $a_{ij} = 0$, $i > j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(ii) Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)X = 0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

1º Caso: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 5z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ e \\ z = 0 \end{cases}.$$

Logo, $v_1 = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$, com $x \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$, isto é, o espaço solução \mathbb{S}_1 é dada por:

$$\mathbb{S}_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\} = [(1, 0, 0)],$$

isto é, $(1, 0, 0)$ gera \mathbb{S}_1 . Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor $(1, 0, 0)$.

2º Caso: $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2x + 5z = 0 \\ z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ e \\ z = 0 \end{cases}.$$

Logo, $v_1 = (0, y, 0) = y(0, 1, 0)$, com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_2 = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\} = [(0, 1, 0)],$$

ou seja, $(0, 1, 0)$ gera \mathbb{S}_2 .

3º Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 3x + 5z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z \\ e \\ z = -\frac{1}{5}z \end{cases}.$$

Logo, $v_1 = \left(\frac{-5}{3}z, \frac{-1}{5}, z\right) = z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$, com $z \neq 0$ é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ z \left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1 \right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} e z \neq 0 \right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1 \right) \right],$$

ou seja, $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$ gera \mathbb{S}_3 . ■

Problema 6.1

1. Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathbb{S} = \{t + 3, 2t + \lambda^2 + 2\}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ é L.I. (Linearmente independente) ? e L.D. (Linearmente dependente)?

Refazendo a questão de uma outra forma: Dada a equação:

$$a(t + 3) + b(2t + \lambda^2 + 2) = 0t + 0$$

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$, para que o sistema homogêneo só admita a solução trivial (solução nula), assim \mathbb{S} é L.I. Caso contrário, \mathbb{S} será L.D.(teremos infinitas soluções)

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} a(t + 3) + b(2t + \lambda^2 + 2) &= 0t + 0 \iff \\ (a + 2b)t + [3a + b(\lambda^2 + 2)] &= 0t + 0. \end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3a + b(\lambda^2 + 2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{3E_1 - E_2 \rightarrow E_2} \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 0 + (4 - \lambda^2)b = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$(2 - \lambda)(2 + \lambda)b = 0.$$

1º Caso: $\lambda \neq \pm 2 \implies b = 0 \implies a = 0$. Neste caso, o sistema só admite solução trivial ou nula. Logo, \mathbb{S} é L.I

2º Caso: $\lambda = 2 \implies 0.b = 0$, voltamos para equação anterior $a + 2b = 0$. Neste caso, o sistema admite infinitas soluções. Logo, \mathbb{S} é L.D

3º Caso: $\lambda = -2 \implies 0.b = 0$ voltando a equação $a + 2b = 0$. Analogamente, o sistema admite infinitas soluções. Logo, \mathbb{S} é L.D. ■

2. Seja $\mathbb{S} = \{e^{2x}, e^{5x}\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dada a equação:

$$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0.$$

Prove que: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Demonstração

Dada a equação

$$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0. \tag{I}$$

Multiplicando (I) por $e^{-2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{3x} = 0. \tag{II}$$

Agora, derivando em relação a x $[(e^{Kx})' = Ke^{Kx}]$, vem:

$$0 + 3\lambda_2 e^{3x} = 0 \implies \lambda_2 = 0 \quad (III)$$

Assim, substituindo (III) em (II), segue-se que:

$$\lambda_1 = 0.$$

Ou ainda,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

De sorte que: \mathbb{S} é linearmente independente. ■



Observação

Seja $\mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x)\}$, onde $y_1(x), y_2(x) \in C^1(\alpha, \beta)$, ou seja, $y_1(x), y_2(x)$ tem derivadas contínuas. Wronskiano é dado pela determinante da matriz, a saber:

$$\mathbb{W}[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta),$$

onde y_1' e y_2' são as derivadas de 1ª ordem das funções $y_1(x), y_2(x)$.

Fato

$$\mathbb{W}[y_1, y_2] \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta) \implies \mathbb{S} \text{ é L.I.}$$

L.I. (Linearmente Independente).

$\mathbb{W}[y_1, y_2] = 0$ nada se pode concluir.

Generalizando

Seja $\mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$. O Wronskiano, é dado por:

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Fato

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0 \implies \mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

é L.I. (Linearmente Independente)

Ressaltamos que se $\mathbb{W}[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$, nada se pode concluir, a título ilustrativo, considere $\mathbb{S} = \{x^3, |x|^3\}$ para todo $x \neq 0$, tem-se:

$$\mathbb{W} = [x^3, |x|^3] = 0,$$

no entanto, \mathbb{S} é L.I.

De fato, por definição, sendo $x \neq 0$, tem-se: $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$. Agora, dada a equação:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 |x|^3 = 0.$$

1º Caso: $x > 0$:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^3 = (\lambda_1 + \lambda_2) x^3 = 0 \implies \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

e, procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $x < 0$:

$$\lambda_1 x^3 - \lambda_2 x^3 = 0 \implies (\lambda_1 - \lambda_2) x^3 = 0 \implies \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Decorre dos casos (1) e (2) que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Como o sistema só admite a solução trivial (solução nula) segue-se que: \mathbb{S} é L.I. ■

Exemplo 6.9

1. Ilustrativamente, tomemos o exemplo anterior

$$\begin{aligned} \mathbb{W}[y_1, y_2] &= \mathbb{W}[e^{2x}, e^{5x}] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \cdot e^{5x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = e^{7x} \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 1) \\ &= 3e^{7x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, \mathbb{S} é L.I. ■

2. Prove que: são linearmente independente (L.I.).

(i) $\mathbb{S} = \{e^x, e^{3x}, e^{9x}\}$ (ii) $\mathbb{S} = \{\cos(kx), \sin(kx)\}$, desde que $k \neq 0$.

Demonstração

(i) Por definição de wonskiano, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}[e^x, e^{3x}, e^{9x}] &= \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} & e^{9x} \\ e^x & 3e^{3x} & 9e^{9x} \\ e^x & 9e^{3x} & 81e^{9x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{3x} \cdot e^{9x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3^2 & 9^2 \end{vmatrix} \\ &= e^{13x} (9 - 3) \cdot (9 - 1) \cdot (3 - 1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{S} = \{e^x, e^{3x}, e^{9x}\}$ é L.I. ■



Observação Matriz de Vandermond ou das Potências:

Um exemplo para ilustrar é: o determinante desta matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ é descrito por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c - b) \cdot (c - a) \cdot (b - a)$$

(ii) Por definição de wonskiano, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}[\cos(kx), \sin(kx)] &= \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \sin(kx) & k \cos(kx) \end{vmatrix} \\ &= k [\cos^2(kx) + \sin^2(kx)] \\ &= k \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De sorte que: \mathbb{S} é L.I. ■



Observação

Em equações diferenciais ordinárias a ideia de funções serem linearmente independentes é fundamental (verão este tema detalhadamente posteriormente nos Cálculos)

6.4 Matrizes

Definição 6.7

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ onde: } \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}, \text{ sendo } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

m são as linhas e n as colunas da matriz. Cada a_{ij} é um elemento da matriz na linha i e coluna j . ♣

Exemplo 6.10

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}. \text{ Daí, temos:}$$

$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 0, a_{21} = -1, a_{22} = 3$ e $a_{23} = 4$.

$$2. B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}. \text{ Assim,}$$

$b_{11} = 1, b_{12} = 3, b_{21} = 0, b_{22} = -2, b_{31} = 4$ e $b_{32} = 2$.



Observação

$$1. A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

2. $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ — É o espaço de todas as matrizes de ordem $m \times n$ com entradas reais.

Operações

1. $A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$, onde: $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$
2. $A \pm B : \iff (a \pm b)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, onde: $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$
3. $\lambda A : \iff (\lambda a)_{ij} = \lambda a_{ij}$, onde: $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

Algumas Propriedades

Sejam $A, B, C \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, então, tem-se:

- P₁) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- P₂) $A + B = B + A$
- P₃) $\exists! 0_{m \times n}; \forall A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) : A + 0 = A$
- P₄) $\forall A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}); \exists! -A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) : A + (-A) = 0$
- P₅) $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall A, B, C \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) : \lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$



Observação

$$1. A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

2. $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ — É o espaço de todas as matrizes de ordem $n \times n$ com entradas reais.

$$\text{Matrizes: } \begin{cases} \text{Diagonal:} & D_n = (D_{ij})_{n \times n}; & D_{ij} = \begin{cases} D_{ij}, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \\ \text{Identidade} & I_n = (I_{ij})_{n \times n}; & I_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \\ \text{Triângular Superior:} & T_n = (T_{ij})_{n \times n}; & T_{ij} = 0; i > j. \end{cases}$$

Exemplo 6.11

$$1. D_n = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn} \end{pmatrix} \text{ matriz diagonal;}$$

$$2. I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz identidade;}$$

$$3. T_n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & T_{nn} \end{bmatrix} \text{ matriz triangular superior.}$$

Produto de Matrizes

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Observação

(i) O produto das matrizes A e B é dado por:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \text{---} & A_1 & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & A_2 & \text{---} & \text{---} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{---} & A_m & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B^1 & B^2 & \dots & B^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 & \dots & A_1 B^p \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 & \dots & A_2 B^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m B^1 & A_m B^2 & \dots & A_m B^p \end{pmatrix}_{m \times p}$$

(ii) Cada elemento da matriz produto $A \cdot B$ é descrito por:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n A_{i\alpha} B_{\alpha j} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{in} B_{nj}.$$

Observação

O produto de matrizes generaliza o produto interno ou escalar, com efeito, escolhemos

$$u \cdot v = \langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

Exemplo 6.12

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule (se existirem): (a) $A.B$ (b) $B.A$

Solução

Usaremos as notações A_1 e A_2 para descrever as linhas da matriz A e analogamente, B^1 e B^2 as colunas da matriz B . Assim,

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & A_1 & \dots \\ \dots & A_2 & \dots \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ B^1 & B^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$. Então, temos:

$$A.B = \begin{pmatrix} \dots & A_1 & \dots \\ \dots & A_2 & \dots \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ B^1 & B^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} A_1 B^1 & A_1 B^2 \\ A_2 B^1 & A_2 B^2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ ou ainda,}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Cálculos Auxiliares

$$A_1 B^1 = 1.1 + 2.0 + 0.1 = 1$$

$$A_1 B^2 = 1.3 + 2.(-2) + 0.1 = -1$$

$$A_2 B^1 = -1.1 + 3.0 + 4.1 = 3$$

$$A_2 B^2 = -1.3 + 3.(-2) + 4.1 = -5.$$

Logo,

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -8 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}.$$

Daí, segue-se que: em geral, matrizes não são comutativas, ou seja,

$$A.B \neq B.A$$

Algumas Propriedades:

$$P_1) A.(B.C) = (A.B).C$$

$$P_2) A.I_n = I_n.A = A$$

$$P_3) A(\lambda B) = \lambda(A.B)$$

$$P_4) (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$P_5) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Observação

(a) Em geral, temos: $A \cdot B \neq B \cdot A$

(b) $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Com efeito, tomando-se: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então, vem:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, A e B são não nulas.

Matriz transposta:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow A^t = (a_{ji})_{n \times m}$$

(A^t é a matriz transposta da matriz A)

Matrizes Especiais:

$$\text{Matrizes: } \begin{cases} \text{Simétrica:} & A^t = A \\ \text{Anti-Simétrica:} & A^t = -A \end{cases}.$$

Observação

Se a matriz é anti-simétrica, temos: $a_{ji} = -a_{ij}$; quando $i = j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Exemplo 6.13

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}; A^t = -A \text{ (} A \text{ é uma matriz anti-simétrica)}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}; A^t = -A \text{ (} A \text{ é uma matriz anti-simétrica)}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} a & k & d \\ k & b & e \\ d & e & c \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} a & k & d \\ k & b & e \\ d & e & c \end{pmatrix}; A^t = A \text{ (} A \text{ é uma matriz simétrica)}$$

4. Sejam $\mathbb{A}, \mathbb{P} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Mostre que:

(a) Se \mathbb{A} é simétrica, então, $\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$ é simétrica.

(b) Se \mathbb{A} é anti-simétrica, então, $\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$ é anti-simétrica.

Fato que Ajuda

Vale salientar que usaremos este resultado: $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$.

De fato,

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ji}^T = (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{A}_{i\alpha} \mathbb{B}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{B}_{j\alpha}^T \mathbb{A}_{\alpha i}^T = (\mathbb{B}^T \mathbb{A}^T)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T.$$

Demonstração

(a) Com efeito, \mathbb{A} é simétrica, então, temos: $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$. Agora, seja $X = \mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$, falta mostrar que: $X^T = X$.

De fato,

$$X^T = (\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P})^T = \mathbb{P}^T \mathbb{A}^T (\mathbb{P}^T)^T = \mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P} = X.$$

Logo, X é simétrica. ■

Demonstração

(b) Se \mathbb{A} é anti-simétrica, então, $\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$ é anti-simétrica.

Com efeito, \mathbb{A} é anti-simétrica, então, temos: $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$. Agora, seja $X = \mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P}$, queremos mostrar que: $X^T = -X$.

De fato,

$$X^T = (\mathbb{P}^T \mathbb{A} \mathbb{P})^T = \mathbb{P}^T \mathbb{A}^T (\mathbb{P}^T)^T = \mathbb{P}^T (-\mathbb{A}) \mathbb{P} = -X.$$

Logo, X é anti-simétrica. ■

6.4.1 Matrizes Inversas

Definição 6.8

Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Dizemos que: B é a matriz inversa de A .

Notação

$B = A^{-1}$ (Cuidado! $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$)

A é uma matriz invertível.



Problema 6.2

1. Seja \mathbb{J}_n a matriz $n \times n$ tal que todas as entradas são 1. Mostre que se $n > 1$, então, temos:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n)^{-1} = \mathbb{I} - \frac{1}{n-1} \mathbb{J}_n.$$

Demonstração

Com efeito, $\mathbb{J}_n^2 = n\mathbb{J}_n$, $\mathbb{I}\mathbb{J}_n = \mathbb{J}_n$ e $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$.

Basta mostrar que:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1} \mathbb{J}_n \right) = \mathbb{I}.$$

Defato,

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} - \mathbb{J}_n) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1} \mathbb{J}_n \right) &= \mathbb{I}^2 + \frac{1}{n-1} \mathbb{J}_n^2 - \frac{1}{n-1} \mathbb{I}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n\mathbb{I} \\ &= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1} n\mathbb{J}_n - \frac{1}{n-1} \mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n \\ &= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1} n\mathbb{J}_n - \left(\frac{1}{n-1} + 1 \right) \mathbb{J}_n \\ &= \mathbb{I} + \frac{n}{n-1} \mathbb{J}_n - \frac{n}{n-1} \mathbb{J}_n = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n)^{-1} = \mathbb{I} - \frac{1}{n-1} \mathbb{J}_n.$$

■

2. Sejam $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Se $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ e \mathbb{A} forem invertíveis, então, mostre que

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{A}^{-1} (\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1})^{-1}.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{-1} (\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1})^{-1} &= [(\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}) \cdot \mathbb{A}]^{-1} \\ &= [\mathbb{I}_n\mathbb{A} + \mathbb{B}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})]^{-1} \\ &= (\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1} \end{aligned}$$

■

Definição 6.9

Dizemos que uma matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é **ortogonal**, quando:

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T.$$

\mathbb{A} é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \iff \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$.



Exemplo 6.14

Seja $\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Então, verifique se: \mathbb{A}_θ é ortogonal.

Solução

Queremos mostrar que \mathbb{A} é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \iff \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$.

Com efeito,

$$\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \implies \mathbb{A}_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Segue-se daí que:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\theta^T = I_2 \iff \mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T$$

Ou ainda, \mathbb{A}_θ é ortogonal. ■

3. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: \mathbb{A} é ortogonal. Então, prove que:

$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, conclua daí que: $\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$.

\mathbb{A} é ortogonal, isto é, $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$

Solução

Considere a base canônica α de \mathbb{R}^n

$\alpha = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$. Assim, temos:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1).$$

Desta forma, a matriz de coordenadas do vetor u na base canônica é dada

por:

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad x^t x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1 \times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

$$x^t x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 = \|x\|^2.$$

Daí, vem:

$$\|\mathbb{A}x\|^2 = (\mathbb{A}x)^t (\mathbb{A}x) = x^t (\mathbb{A}^t \mathbb{A}) x = x^t x = \|x\|^2.$$

Logo,

$$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|.$$

Decorre do delineado acima que:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}(x-y)\|^2 &= \|x-y\|^2 \\ \|\mathbb{A}x\|^2 - 2\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y \rangle + \|\mathbb{A}y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$$

4. Seja $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$. Ache uma matriz invertível \mathbb{P} , tal que:

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução

Seja $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $(\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1})(\mathbb{A}\mathbb{P}) = \mathbb{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Como $\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1} = I_2$ segue-se daí que:

$$\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora, substituindo \mathbb{P} obtemos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 6a-c & 6b-d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\text{Daí, vem: } \begin{cases} a = a, b = -b \\ 6a - c = c \text{ e } 6b - d = -d \end{cases} \implies \begin{cases} a = a, b = 0 \\ 6a - c = c \text{ e } 6b - d = -d \end{cases}.$$

Logo, a matriz \mathbb{P} de forma geral com a e d não-nulos é dada por:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 3a & d \end{pmatrix}, \text{ com } a, d \neq 0.$$

Em particular, para obter **uma matriz invertível** \mathbb{P} , basta escolher valores para a e d , por exemplo, $a = 1$ e $d = 1$, obtemos:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (i) Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3 = 0$. Então, calcule: $(\mathbb{I}_n - \mathbb{A})^{-1}$.

(ii) Dado $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3 - 2\mathbb{A} + 3\mathbb{I}_n = 0$. Obter \mathbb{A}^{-1}

Solução

(i) Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3 = 0$. Então, temos:

$$\mathbb{I}^3 - \mathbb{A}^3 = \mathbb{I}^3 = \mathbb{I}.$$

Como $\mathbb{I}^3 - \mathbb{A}^3 = (\mathbb{I} - \mathbb{A})(\mathbb{I}^2 + \mathbb{I}\mathbb{A} + \mathbb{A}^2) = (\mathbb{I} - \mathbb{A})(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2)$ segue-se daí que:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2) = \mathbb{I}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = \mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2.$$

e também

$$(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2)^{-1} = \mathbb{I} - \mathbb{A}.$$

(ii)

Lembrando da definição

$$X.Y = Y.X = I \iff \begin{cases} X = Y^{-1} \\ \text{ou} \\ Y^{-1} = X \end{cases}$$

Dado $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3 - 2\mathbb{A} + 3\mathbb{I}_n = 0$. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^3 - 2\mathbb{A} + 3\mathbb{I}_n &= 0 \iff 2\mathbb{A} - \mathbb{A}^3 = 3\mathbb{I}_n \\ &\iff \frac{2\mathbb{A} - \mathbb{A}^3}{3} = \mathbb{I}_n \\ &\iff \mathbb{A} \cdot \frac{(2\mathbb{I} - \mathbb{A}^2)}{3} = \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{3}(2\mathbb{I} - \mathbb{A}^2).$$

Algumas Propriedades

$$P_1) (A^T)^T = A$$

$$P_2) (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$P_3) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$P_4) (A.B)^T = B^T.A^T$$

$$P_5) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$P_6) (A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

$$P_7) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$P_8) (A_1.A_2 \dots A_{(n-1)}A_n)^T = A_n^T.A_{(n-1)}^T \dots A_2^T.A_1^T$$

$$P_8) (A_1.A_2 \dots A_{(n-1)}A_n)^{-1} = A_n^{-1}.A_{(n-1)}^{-1} \dots A_2^{-1}.A_1^{-1}.$$

Problema 6.3

1. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então, prove que:

(i) $s = \frac{\mathbb{A} + \mathbb{A}^T}{2}$ é simétrica;

(ii) $a = \frac{\mathbb{A} - \mathbb{A}^T}{2}$ é anti-simétrica;

(iii) Conclua daí que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}$, onde S é o espaço das matrizes simétricas e \mathcal{A} o espaço das matrizes anti-simétricas;

(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Demonstração

(i) Queremos mostrar que: $s^T = s$.

De fato,

$$s^T = \left(\frac{\mathbb{A} + \mathbb{A}^T}{2} \right)^T = \frac{\mathbb{A}^T + (\mathbb{A}^T)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T + \mathbb{A}}{2} = s.$$

Logo, s é simétrica. ■

(ii) Procedendo de forma análoga, temos:

$$\begin{aligned} a^T &= \frac{(\mathbb{A} - \mathbb{A}^T)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T - (\mathbb{A}^T)^T}{2} \\ &= \frac{\mathbb{A}^T - \mathbb{A}}{2} = -\frac{(\mathbb{A} - \mathbb{A}^T)}{2} = -a. \end{aligned}$$

De sorte que: a é anti-simétrica. ■

(iii)

$\forall \mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\mathbb{A} = \frac{\mathbb{A} + \mathbb{A}^T}{2} + \frac{\mathbb{A} - \mathbb{A}^T}{2}$$

Como $\frac{\mathbb{A} + \mathbb{A}^T}{2} = s \in S$ e $\frac{\mathbb{A} - \mathbb{A}^T}{2} = a \in \mathcal{A}$, segue-se daí que:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Com efeito, seja $K \in S \cap \mathcal{A}$, então, temos: $K \in S$ e $K \in \mathcal{A}$.

Ora,

$$\left\{ \begin{array}{l} K \in S \\ \text{e} \\ K \in \mathcal{A}. \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} K^T = K \\ \text{e} \\ K^T = -K. \end{array} \right. \implies K = -K \implies K = 0.$$

Portanto, $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$. ■

 **Observação**

(A) Posteriormente voltaremos ao tema (soma direta de subespaços), quando isto ocorrer:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A} \text{ e } S \cap \mathcal{A} = \{0\}.$$

Diremos que a soma é direta, denotaremos por:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus \mathcal{A}.$$

(B) Toda matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se decompõe como soma de simétrica $B \in S$ e anti-simétrica $C \in \mathcal{A}$, ou seja, $A = B + C$, onde: $B^T = B$ e $C^T = -C$

$$\begin{cases} A = B + C \\ e \\ A^T = (B + C)^T \end{cases} \implies \begin{cases} A = B + C \\ e \\ A^T = B^T + C^T \end{cases} \implies \begin{cases} A + A^T = (B + B^T) + (C + C^T) \\ e \\ A - A^T = (B - B^T) + (C - C^T) \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} A + A^T = B + B^T = 2B \\ e \\ A - A^T = (C - C^T) = 2C \end{cases} \implies \begin{cases} B = \frac{A + A^T}{2} \\ e \\ C = \frac{A - A^T}{2}. \end{cases}$$

2. Seja $\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Então, verifique se:

$$(i) \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\beta = \mathbb{A}_{(\theta+\beta)}$$

$$(ii) \mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_\theta^{-1}$$

$$(iii) \mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T$$

$$(iv) \mathbb{A}_\theta^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) \\ \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Demonstração

(i) Basta multiplicar as matrizes e usar as identidades trigonométricas para se obter:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\beta &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen} \beta \\ \text{sen} \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \beta - \text{sen} \theta \text{sen} \beta & -(\text{sen} \theta \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \theta) \\ \text{sen} \theta \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \theta & \cos \theta \cos \beta - \text{sen} \theta \text{sen} \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \beta) & -\text{sen}(\theta + \beta) \\ \text{sen}(\theta + \beta) & \cos(\theta + \beta) \end{bmatrix} = \mathbb{A}_{(\theta+\beta)} \end{aligned}$$

$$(ii) \mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_\theta^{-1}$$

Com efeito, fazendo $\beta = -\theta$, no item anterior, obtemos:

$$\mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_{(\theta-\theta)} = \mathbb{A}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\text{sen} 0 \\ \text{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2.$$

Portanto,

$$\mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_\theta^{-1}.$$

$$(iii) \mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T \iff \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\theta^T = \mathbb{I}_2$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\theta^T = \mathbb{I}_2 \iff \mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T.$$

$$(iv) \mathbb{A}_\theta^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

Basta notar que: no item (i), tomando-se $\beta = \theta$, vem:

$$\mathbb{A}_\theta^2 = \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\theta = \mathbb{A}_{(\theta+\theta)} = \mathbb{A}_{(2\theta)} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

3. Seja $f \in \mathfrak{F}([-a, a])$, então, prove que:

(i) $H_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ é par;

(ii) $H_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é ímpar;

(iii) Conclua daí que $\mathfrak{F}([-a, a]) = U + W$, onde U é o subespaço das funções pares e W o subespaço das funções ímpares;

(iv) $U \cap W = \{0\}$.

(v) A soma é direta, ou seja,

$$\mathfrak{F}([-a, a]) = U \oplus W$$

Demonstração

(i) Queremos mostrar que: $H_1(x) = H_1(-x)$

De fato,

$$H_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = H_1(x), \forall x \in [-a, a].$$

Logo, H_1 é uma função par.

(ii) Procedendo de forma análoga, temos:

$$H_2(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{[f(x)-f(-x)]}{2} = -H_2(x), \forall x \in [-a, a].$$

De sorte que: H_2 é uma função ímpar.

(iii) $\forall f \in \mathfrak{F}([-a, a])$, tem-se:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Como $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = H_1(x) \in U$ e $\frac{f(x) - f(-x)}{2} = H_2(x) \in W$, segue-se daí que:

$$\mathfrak{F}([-a, a]) = U + W.$$



(iv) $U \cap W = \{0\}$.

Com efeito, seja $K \in U \cap W$, então, temos: $K \in U$ e $K \in W$.

Ora,

$$\begin{cases} K \in U \\ \text{e} \\ K \in W. \end{cases} \implies \begin{cases} K(x) = K(-x) \\ \text{e} \\ -K(x) = K(-x). \end{cases} \implies K(x) = -K(x) \implies K = 0.$$

Portanto, $U \cap W = \{0\}$.



Posteriormente voltaremos ao tema (soma direta de subespaços), quando:

$$\mathfrak{F}([-a, a]) = U + W \text{ e } U \cap W = \{0\}.$$

Diremos que a soma é direta, denotaremos por:

$$\mathfrak{F}([-a, a]) = U \oplus W$$



Potências de matrizes

$$A^m = \overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{m \text{ vezes}} \text{ e } A^0 = I_n$$

$$\text{Matrizes: } \begin{cases} \text{Nilpotente: } A^n = 0 \quad A \neq 0, \geq 2. \\ \text{Idempotente: } A^2 = A \quad A \neq 0. \end{cases}$$

Exemplo 6.15

$$1. A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (Verifique!)}$$

Logo, A é uma matriz idempotente. (Posteriormente, veremos que esta matriz representa uma projeção ortogonal)

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = 0 \text{ e, portanto, } A \text{ é nilpotente de índice } 3$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $A^2 = 0$ e, portanto, A é nilpotente de índice 2)

O índice de nilpotência da matriz A é no máximo o seu tamanho.

4. Uma matriz A é idempotente se $A^2 = A$.

(a) Mostre que: Se A é idempotente, então, ou $A = I$ ou A não é invertível.

(b) Mostre que: Se $AB = A$ e $BA = B$, então, A e B são idempotentes.

Demonstração

(a) Com efeito, A é idempotente, então por definição temos:

$$A^2 = A.$$

Agora, se admitirmos A invertível, obtemos:

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}.A \iff (A^{-1}A).A = I \implies A = I.$$

Caso contrário, A é não invertível. ■

(b) De fato, $\begin{cases} AB = A \\ e \\ BA = B \end{cases} \implies A(BA) = A \implies (AB)A = A \implies AA = A.$

Logo, A é idempotente. ■

Analogamente, temos: $\begin{cases} AB = A \\ e \\ BA = B \end{cases} \implies B(AB) = B \implies (BA)B = B \implies BB = B.$

Portanto, B é idempotente. ■

6.5 Apêndice A

⌘ Problemas Pensando um pouco mais ⌘

1. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente de índice n . Prove que A não é invertível.

Demonstração

Antes de passar a demonstrarmos, revisitemos o método de redução ao absurdo: Queremos mostrar que:

$$p \implies q$$

O método consiste em *negar* a tese e manter a hipótese: chegando assim, a uma contradição. A contradição (ou absurdo!) foi gerada pelo fator de *negar a tese*.

Logo, a tese é verdadeira. Em linguagem simbólica, temos:

$$\sim q \wedge p \implies \text{Contradição, logo, } \sim(\sim q) = q \text{ é verdadeiro.}$$

Agora, deixemos de prosopopéia e passemos a prova.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente de índice n . Por definição, temos: $A^n = 0$, com $A \neq 0$.

Agora, suponhamos que \mathbb{A} é invertível, então, por definição, tem-se:

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})^n &= (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})^n = \mathbb{I}^n = \mathbb{I} \\ \implies &\overbrace{(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}) \cdot (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}) \dots (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})}^{n \text{ vezes}} = \mathbb{I} \\ &= \mathbb{A}^n (\mathbb{A}^{-1})^n = \mathbb{A}^n \cdot (\mathbb{A}^{-1})^n = \mathbb{I} \implies \mathbb{I} = \mathbb{0}. \end{aligned}$$

Absurdo! Visto que admitimos \mathbb{A} invertível.

Portanto, \mathbb{A} é não invertível. ■

2. Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: \mathbb{A} é simétrica. Então, mostre que:

$$\sum_{j=0}^n \mathbb{A}^j = \mathbb{I} + \mathbb{A} + \dots + \mathbb{A}^n,$$

é simétrica.

Demonstração

Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: \mathbb{A} é simétrica, então, por definição, tem-se:

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^T.$$

Queremos provar que:

$$\mathbb{S}^T = \sum_{j=0}^n \mathbb{A}^j = \mathbb{I} + \mathbb{A} + \dots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}.$$

Inicialmente, provemos por indução finita sobre n que: $(\mathbb{A}^n)^T = (\mathbb{A}^T)^n$ e $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Daí, segue-se que: $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$, vamos mostrar!

De fato,

(i) Para $n = 2$, tem-se:

$$(\mathbb{A}^2)^T = (\mathbb{A}\mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T \mathbb{A}^T = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}^2.$$

(ii) Suponha válido para n , isto é, $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$, então, queremos mostrar para $n + 1$

$$(\mathbb{A}^{n+1})^T = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Vejamos

$$(\mathbb{A}^{n+1})^T = (\mathbb{A}^n \mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T \cdot (\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^T &= \left(\sum_{j=0}^n \mathbb{A}^j \right)^T = (\mathbb{I} + \mathbb{A} + \dots + \mathbb{A}^n)^T \\ &= (\mathbb{I}^T + \mathbb{A}^T + \dots + (\mathbb{A}^n)^T) \\ &= \mathbb{I} + \mathbb{A} + \dots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, \mathbb{S} é uma matriz simétrica. ■

Alguns Fatos Básicos:

(F₁) Vale salientar que usamos este resultado: $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

De fato,

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ji}^T = (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{A}_{i\alpha}\mathbb{B}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbb{B}_{j\alpha}^T\mathbb{A}_{\alpha i}^T = (\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T.$$

(F₂) Generalize!

$$(\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2 \dots \mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}_n^T \cdot \mathbb{A}_{(n-1)}^T \dots \mathbb{A}_2^T \cdot \mathbb{A}_1^T.$$

(Prove usando indução finita sobre n)

E fácil ver que:

(i) Para $n = 2$, temos:

$$(\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2)^T = \mathbb{A}_2^T \cdot \mathbb{A}_1^T$$

(Caso anterior)

(ii) Suponha válido para n , ou seja,

$$(\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2 \dots \mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}_n^T \cdot \mathbb{A}_{(n-1)}^T \dots \mathbb{A}_2^T \cdot \mathbb{A}_1^T.$$

(Hipótese de indução)

Então, falta mostrar para $n + 1$.

Basta notar que:

$$(\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2 \dots \mathbb{A}_n \cdot \mathbb{A}_{(n+1)})^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T \cdot \overbrace{(\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2 \dots \mathbb{A}_n)^T}^{\text{hipótese de indução}} = \mathbb{A}_{(n+1)}^T \cdot \overbrace{\mathbb{A}_n^T \dots \mathbb{A}_2^T \cdot \mathbb{A}_1^T}^{\text{hipótese de indução}}.$$

Logo,

$$(\mathbb{A}_1 \cdot \mathbb{A}_2 \dots \mathbb{A}_n \cdot \mathbb{A}_{(n+1)})^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T \cdot \mathbb{A}_n^T \dots \mathbb{A}_2^T \cdot \mathbb{A}_1^T.$$



3. Mostre que se x é qualquer vetor-coluna não-nulo de \mathbb{R}^n , então a matriz

$\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathbb{A} = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}xx^T$$

é ortogonal e também simétrica.

Definição 6.10

Dizemos que uma matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, quando:

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T.$$



Queremos provar que:

(i) \mathbb{A} é uma matriz simétrica, isto é, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$;

(ii) \mathbb{A} é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \iff \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$.

Demonstração

(i) Com efeito,

$$x^T \cdot x = (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2.$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^T &= \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T \right)^T = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} (x x^T)^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} (x^T)^T x = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Logo, \mathbb{A} é uma matriz simétrica.

(ii) A priori, como $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^T &= \mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T \right) \cdot \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T \right) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} (x x^T) \cdot (x x^T) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} x (x^T \cdot x) x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} x (x^T \cdot x) x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^2} x x^T = \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

De sorte que: \mathbb{A} é uma matriz ortogonal



4. (a) Sejam a_1, a_2 e a_3 números reais positivos. Prove que:

$$(a_1 + a_2 + a_3) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \geq 9.$$

Generalize.

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Mostre que:

$$(a_1 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Demonstração

Não faremos o caso particular (Fica como exercício!)

1º modo:

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$, com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$, então, façamos por simplicidade

$$u = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) \text{ e } v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right).$$

Além disso, veja que resultados lindos e elegantes, usando a norma

euclidiana e o produto interno usual, temos:

$$\|u\| = \sqrt{a_1 + \dots + a_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j}, \|v\| = \sqrt{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}}$$

e

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n \left(\sqrt{a_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_j}} \right) = \sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \dots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}} = n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o belíssimo resultado:

$$n = \left| \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_j}} \right| \leq \sqrt{a_1 + \dots + a_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

e, portanto, elevando-se ao quadrado, ambos os membros da desigualdade, vem:

$$n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$



2º modo:

À luz das desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}. \tag{1}$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)}{n}. \tag{2}$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_j} \cdot \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}} = 1,$$

obtemos:

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$



5. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)X = 0.$$

Solução

(i) Com efeito, temos:

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = (1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) \cdot (-2 - \lambda) = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = 3 \text{ ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).



Observação

(A) Notação:

$$\prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

Produtório de a_{ii} , variando de $i = 1$ até $i = n$

(B) Se $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $a_{ij} = 0, i > j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(ii) Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)X = 0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

1º Caso: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 5z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ e \\ z = 0 \end{cases}.$$

Logo, $v_1 = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$, com $x \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$, isto é, o espaço solução \mathbb{S}_1 é dada por:

$$\mathbb{S}_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\} = [(1, 0, 0)],$$

isto é, $(1, 0, 0)$ gera \mathbb{S}_1 . Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor $(1, 0, 0)$.

2º Caso: $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2x + 5z = 0 \\ z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ e \\ z = 0 \end{cases}.$$

Logo, $v_1 = (0, y, 0) = y(0, 1, 0)$, com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_2 = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\} = [(0, 1, 0)],$$

ou seja, $(0, 1, 0)$ gera \mathbb{S}_2 .

3º Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 3x + 5z = 0 \\ 5y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z \\ e \\ z = -\frac{1}{5}z \end{cases}.$$

Logo, $v_1 = \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{1}{5}z, z\right) = z\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{5}, 1\right)$, com $z \neq 0$ é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ z \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{5}, 1 \right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} \text{ e } z \neq 0 \right\} = \left[\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{5}, 1 \right) \right],$$

ou seja, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{5}, 1\right)$ gera \mathbb{S}_3 . ■

6. Não existem matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tais que:

$$AB - BA = I.$$

Demonstração

Suponha válido, então, usando o traço da matriz identidade,

vem: $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I) = n$.

Por outro lado, tem-se:

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^n A_{i\alpha} B_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^n B_{\alpha i} A_{i\alpha} = \text{tr}(BA).$$

Assim,

$$\text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0 \iff \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I) = 0.$$

Absurdo! Visto que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Portanto, tais matrizes não existem satisfazendo

$$AB - BA = I. \quad \blacksquare$$

7. (i) Seja M uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, prove que:

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^AM.$$

Demonstração

Com efeito,

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots,$$

então,

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(M^{-1}AM)^j}{j!} = I + M^{-1}AM + \frac{(M^{-1}AM)^2}{2!} + \dots + \frac{(M^{-1}AM)^n}{n!} + \dots,$$

Daí, não esquecendo que a série converge uniformemente e

$$(M^{-1}AM)^j = M^{-1}A^jM$$

(É fácil ver por indução finita sobre n), segue-se que:

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IM + M^{-1}AM + \frac{(M^{-1}AM)^2}{2!} + \dots + \frac{(M^{-1}AM)^n}{n!} + \dots \\ &= M^{-1} \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \right) M \\ &= M^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) M = M^{-1}e^AM. \end{aligned}$$

(ii) $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$, $\forall t \iff A$ comuta com B ,

com $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração

(\implies) Se $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$, então, derivando ambos os lados, temos:

$$(A + B) e^{(A+B)t} = A e^{At} \cdot e^{Bt} + B e^{At} \cdot e^{Bt}.$$

Agora, derivando novamente e fazendo $t = 0$, obtemos:

$$(A + B)^2 e^{(A+B)t} = A^2 e^{At} \cdot e^{Bt} + A B e^{At} \cdot e^{Bt} + B A e^{At} \cdot e^{Bt} + B^2 e^{At} \cdot e^{Bt}.$$

Logo,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA.$$

(\impliedby) Se $AB = BA$, então, é fácil ver que:

$$X(t) = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

satisfaz ao problema de valor inicial (p.v.i)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A + B) X(t) \\ X(0) = I. \end{cases}$$

(Verifique!). Então, pela unicidade da solução temos:

$$X(t) = e^{(A+B)t}.$$

De sorte que:

$$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}, \forall t$$

 **Observação**

Se A é nilpotente de índice k , temos: $A^k = 0$ com $A \neq 0$ e $0 < k \leq n$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots,$$

Todos estes fatos básicos serão de fundamental importância para a Forma Canônica de Jordan.

8. Seja \mathfrak{A} a álgebra das matrizes quadradas sobre um corpo ordenado completo $K = \mathbb{R}$ e seja P uma matriz invertível em \mathfrak{A} . Mostre que a transformação $A \mapsto P^{-1}.A.P$, onde $A \in \mathfrak{A}$ é um isomorfismo de álgebra \mathfrak{A} em si mesma. corpo ordenado completo dos números reais $K = \mathbb{R}$

Demonstração

Seja $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ definida por $\varphi(A) = P^{-1}.A.P$, vamos determinar o núcleo de φ , a saber:

$$\text{Ker}(\varphi) = \{A_0 \in \mathfrak{A}; \varphi(A_0) = 0\}.$$

Vejamos

$$\begin{aligned} \varphi(A_0) &= P^{-1}.A_0.P = 0 \implies (P.P^{-1}).A_0.P = P.0 \\ &\implies I.A_0.(P.P^{-1}) = 0.P^{-1} \implies A_0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Ker}(\varphi) = \{0\} \iff \varphi \text{ é injetora.}$$



Agora, mostrar que φ é sobrejetora. por definição, temos:

$$\forall B \in \text{Im}(\varphi); \exists A \in \mathfrak{A} : A = P.B.P^{-1}$$

Cálculos Auxiliares:

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= P^{-1}.A.P = B \iff (P.P^{-1}).A.P = P.B \\ &\iff A.(P.P^{-1}) = P.B.P^{-1} \iff A = P.B.P^{-1}. \end{aligned}$$

Assim.

$$\varphi(A) = \varphi(P.B.P^{-1}) = P^{-1}.(P.B.P^{-1}).P = (P^{-1}.P).B.(P^{-1}.P) = B.$$

Dito de outro modo, $\text{Im}(\varphi) = \mathfrak{A}$, ou seja, φ é sobrejetora.



Logo, φ é bijetora

e finalmente, mostremos que:

(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in K; \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) &= P^{-1} \cdot (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot P \\ &= \lambda_1 (P^{-1} \cdot A_1 \cdot P) + \lambda_2 (P^{-1} \cdot A_2 \cdot P) \\ &= \lambda_1 \varphi(A_1) + \lambda_2 \varphi(A_2). \end{aligned}$$

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi(A_1 \cdot A_2) &= P^{-1} \cdot (A_1 \cdot A_2) \cdot P \\ &= (P^{-1} \cdot A_1 \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A_2 \cdot P) \\ &= \varphi(A_1) \cdot \varphi(A_2). \end{aligned}$$

De sorte que: φ é um isomorfismo. ■

9. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2)X = 0.$$

A equação característica é descrita por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \implies (1 - \lambda) \cdot (-3 - \lambda) = 0 &\implies \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = -3, \end{cases} \end{aligned}$$

serão chamados posteriormente de autovalores ou valores característicos.

Vamos determinar as soluções não-nulas os chamados posteriormente de autovetores correspondentes.

1º Caso: $\lambda = 1$:

$$(A - \lambda I_2) \cdot X = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2y = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \implies y = 0.$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x(1, 0)$, com $x \neq 0$, ou ainda,

$$S_1 = \{x(1, 0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1, 0)].$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $\lambda = -3$:

$$\begin{aligned}(A - \lambda I_2).X &= 0 \implies \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \{4x + 2y = 0 \implies y = -2x.\end{aligned}$$

De sorte que, o autovetor é: $v_2 = x(1, -2)$, com $x \neq 0$, dito de outro modo temos:

$$S_2 = \{x(1, -2) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1, -2)]$$

10. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(A - \lambda I_2)X = 0.$$

A equação característica é dada por:

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) = 0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 4, \end{cases}\end{aligned}$$

são os autovalores, determinemos os autovetores correspondentes.

Agora, temos dois casos a considerar para resolver o sistema homogêneo e obter as soluções não-nulas.

1º Caso: $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}(A - \lambda I_2).X &= 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} 0x + 2y = 0 \\ 0x + 3y = 0 \end{cases} \implies y = 0.\end{aligned}$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x(1, 0)$, com $x \neq 0$, ou ainda,

$$S_1 = \{x(1, 0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1, 0)]$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $\lambda = 4$:

$$\begin{aligned}(A - \lambda I_2) \cdot X &= 0 \implies \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \implies y = 3x.\end{aligned}$$

Portanto, o autovetor é: $v_2 = x(1, 3)$, com $x \neq 0$, dito de outro modo temos:



$$S_2 = \{x(1, 3) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1, 3)]$$

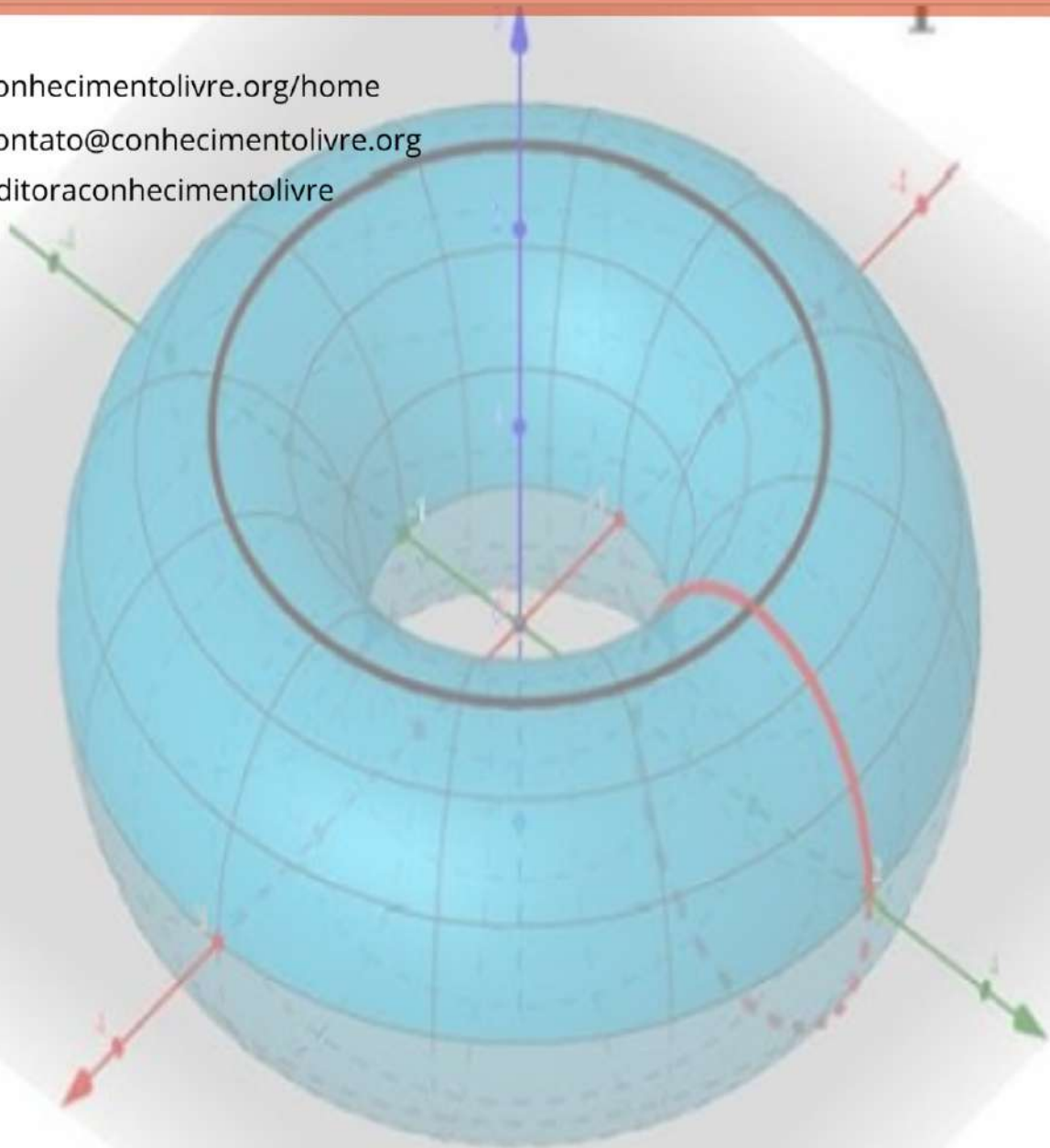
■

Bibliografia

- [1] De Moraes Filho, Daniel Cordeiro. Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3^a Edição, SBM 2016.
- [2] Bartle, Robert G. Introduction to Real Analysis. New York, J. Wiley, 2019
- [3] Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo, vol.1, 6^a Edição, RJ: LTC, 2018
- [4] Lima, Elon Lages. Matemática e Ensino, Coleção do Professor de Matemática, 4^a Edição, RJ, 2017
- [5] De Moraes Filho, Daniel Cordeiro. Manual de Redação Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2^a Edição, SBM 2018
- [6] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, vol. 1, Projeto Euclides, SBM, 21^a Edição, IMPA, 2019
- [7] Aragona, Jorge. Números Reais, Texto Universitário do IME-USP, 2010
- [8] Eves, Howard. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2004
- [9] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm, em 28 de julho às 22h e 30min, 2024
- [10] Figueiredo, D. G. Análise I, Livros Técnicos Científicos, 2016
- [11] Carneiro, J. P. Q., Gomes, M. L. M., & Carvalho., P. C. P. Exames de Textos. Análise de livros de Matemática para Ensino Médio. VITAE, IMPA & SBM, 2001
- [12] Lima, Elon Lages; Wagner, Eduardo; Carvalho, Paulo Cezar Pinto e Morgado, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio, vol 1, Editora SBM, 2016
- [13] Muniz Neto, Antonio Caminha, Tópicos Elementares: Polinômios, SBM, Coleção do Professor de Matemática, volume 6, RJ, 2016
- [14] Carmo, Manfredo Perdigão, Eduardo Wagner, Augusto Cezar de Oliveira Morgado Trigonometria e Números Complexos Capa, SBM, 2005
- [15] Bardi, Jason Socrates, A Guerra do Cálculo, 3^a edição, RJ Record, 2016.
- [16] Lima, Elon Lages: Eduardo Wagner, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado, Temas e Problemas, SBM, Coleção do Professor de Matemática, volume 6, RJ, 2001
- [17] Coelho, Flávio Ulhoa; Mary Lilian Lourenço, Um Curso de Álgebra Linear Editora Universidade de São Paulo-Edusp, 2001.
- [18] Leithold, Louis. O cálculo com Geometria Analítica. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994. volumes.1, 2.
- [19] Swokowisk, E. Willian. Cálculo com Geometria Analítica. 2 ed. São Paulo: Makron, 1995. volumes.1, 2.
- [20] Silva, Cícero José da, Soares, Willames de Albuquerque, Galdino, Sérgio Mário Lins. Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos / Piracanjuba-GO Editora Conhecimento Livre, 2022

PRÉ-CÁLCULO AMPLIADO E COM OS PROBLEMAS RESOLVIDOS

 conhecimentolivre.org/home
 contato@conhecimentolivre.org
 [editoraconhecimentolivre](https://www.instagram.com/editoraconhecimentolivre)



Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

